目 录

第一章　微分几何概论

§1　曲线坐标　最简单的例子

1. 引论

我们来考察 n 维欧氏空间，今后用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间．把 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点与实数组——点关于 $\boldsymbol{R}^n$ 中选定的正交基的坐标，基向量用 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$（长度为 1 单位且互相正交的向量）表示——相对应，我们就认为在 $\boldsymbol{R}^n$ 中选取并建立了笛卡儿坐标 $x^1, \cdots, x^n$，借助于此坐标可以唯一地确定 $\boldsymbol{R}^n$ 中任何一点的位置．利用实数组（也可理解为从坐标原点出发到这点的向径的坐标）描述欧氏空间点的思想，是用纯代数方法能解答许多几何问题的解析几何的基础．这个重要的思想首先（以明显的形式）由笛卡儿引入数学，他的名字已铭刻在"笛卡儿坐标"这个名称中了．几何代数化不仅对几何的发展，而且对整个数学的发展都起着非常重要的作用．这里，我们不打算列举用代数(解析)的方法可简单且优美地解答问题的一些已知的例子(例如，三维空间中二阶曲面的分类问题)，这些例子，读者可参看代数和解析几何教程．我们仅提醒一下，欧氏数量积概念与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的笛卡儿坐标紧密地联系着．数量积为双线性形式，它将每一对向量 $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \boldsymbol{R}^n$ 与一实数相对应，后者通常被表示为 $\langle\vec{\xi}, \vec{\eta}\rangle$，而且这个对应关系的运算对每个向量是对称的和线性的，而形式本身是正定的．在笛卡儿坐标系中，

$$\langle\vec{\xi}, \vec{\eta}\rangle = \xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n,$$

其中$\vec{\xi}=(\xi^1, \cdots, \xi^n)$，$\vec{\eta}=(\eta^1, \cdots, \eta^n)$.

但是，最简单的例子就可说明，要很方便地把许多具体问题用解析法表示出来，笛卡儿坐标是不够的．例如，我们用具有笛卡儿坐标x, y的平面上曲线的方程表示法来表明这一点．当然，当所讨论的是十分简单的曲线时，例如圆或椭圆，那么它们在笛卡儿坐标下的解析表达式是非常简单和自然的．事实上，半径为R，中心在A点的圆的方程写作：$(x-A^1)^2+(y-A^2)^2=R^2$，这里$A=(A^1, A^2)$.

椭圆的方程也简单地写为：$(x-A^1)^2/a^2+(y-A^2)^2/b^2=1$，其中数$a, b$是椭圆的主半轴的长(图1).

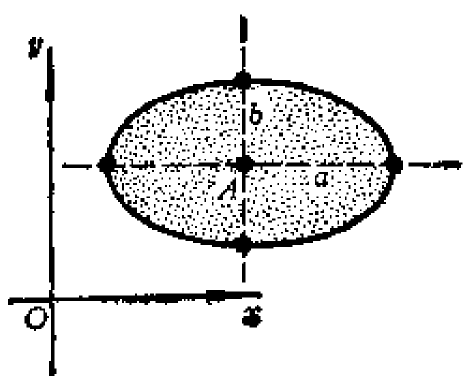


图 1

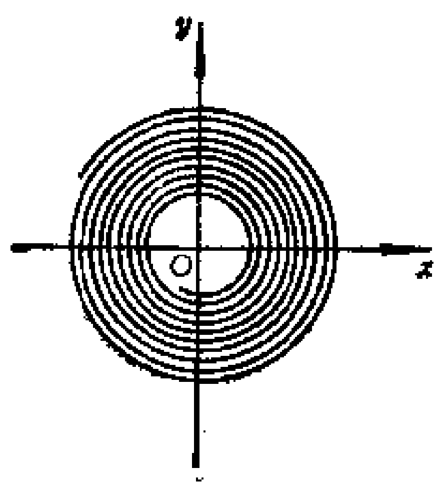


图 2

然而，在各种应用和具体的力学及物理学问题中，往往遇到这样的光滑曲线(譬如说，质点在任何力场中运动的轨迹)，它们在笛卡儿坐标下的显式表达式是很困难的．例如在笛卡儿坐标下方程$\sqrt{x^2+y^2}-e^{\lambda\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}=0$所确定的螺线就是这样(图2)．当然，在笛卡儿坐标下这个曲线的表示法或许还不很复杂，但是在另外的所谓平面极坐标系下，写出这个曲线却是甚为简单的．极坐标系(r, φ)与笛卡儿坐标系之间的关系为：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$(图

3). 在这个坐标系下螺线的方程为 $r=e^{\lambda\varphi}$，以此可立即看清质点按此轨迹运动的特性. 在下面我们还要讨论极坐标系，而这里仅指出这种坐标(称为曲线坐标)的出现，不是数学家在研究中追求标新立异的怪癖，而在某种意义下出于实际上的必要，有时在具体的计算中还是非常有益的. 我们指出(暂不详述)一个问题，对它利用极坐标是有益的.

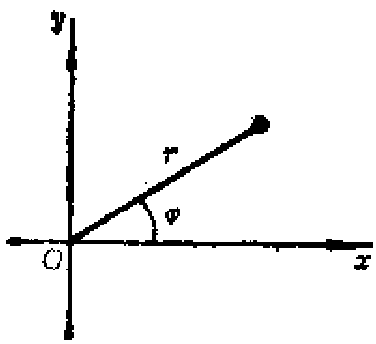


图 3

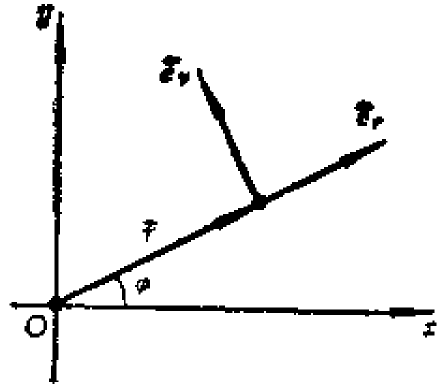


图 4

我们考察在平面中心力场中的质点运动；设中心在 O 点，并在平面上引用极坐标 (r,φ). 假设 $\bar{r}$ 是动点的向径(由 O 点发出的向径)，r 是它的长，t 是时间(运动参数)，这时 r 和 φ 是时间的某个函数. 在极坐标为 $r=|\bar{r}|$、φ 的点 $\bar{r}(t)$，考察两个垂直的单位向量：向量 $\bar{e}_r$，它的指向平行于该点的向径(这时满足 $\bar{r}=r\bar{e}_r$)；向量 $\bar{e}_\varphi$，它垂直于 $\bar{e}_r$，且其方向为极坐标 φ 的增加方向(图 4). 我们在 $\bar{r}(t)$ 上加点，即"$\dot{\bar{r}}(t)$"表示向径 $\bar{r}(t)$ 关于时间 t 的微分. 那么，在力学中已经知道，在平面中心力场中的质点(为简便起见，可把它的质量看作 1) 的运动由下面的微分方程确定：$\ddot{\bar{r}}=f(r)\bar{e}_r$，这里 f 是一个变量 r 的某个光滑的函数. 至此，我们提出一个对读者有益的问题：用平面笛卡儿坐标写出这个微分方程.

质点运动可用两个函数给出：$r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$，这就是在极坐标系中的形式. 完全容易相信，质点在中心力场中运动时，鼠

$r^2\dot{\varphi}$ 是保持不变的. 这是 Kepler 定律之一，这些定律是 Kepler 研究行星在太阳系中的运动时得出的(在他的主持下，已经列表表明行星在"天球"上的坐标为时间的函数). 对这个保持不变的量完全可以赋予明显的几何意义. 为此，Kepler自己引进了下面合适的概念：他称向径$\bar{r}(t)$(向径是时间的函数)扫过的面积$S(t)$变化的速度为扇形速度 v，即 $v=\frac{dS(t)}{dt}$. Kepler 定律用扇形速度的术语简述为："在相等的时间内向径扫过相等的面积，换言之，扇形速度是常数，$\frac{dS(t)}{dt}=\text{const}$." 同样可说明(我们将不在此评论)这是动量矩守恒定律的一种陈述. 读者可以相信，这个定律的结论在极坐标下比在笛卡儿坐标下更为简单(虽然在笛卡儿坐标下当然也能进行计算).

另一方面，在解力学以及物理学的具体问题时，还产生另外的(所谓"曲线的")坐标——柱面坐标，球面坐标等等. 细心地观察将空间的点与实数(称为这点的坐标)的集相对应的这些不同的方法，会觉察到，作为这些对应之基础的是某个共同的思想，即设想出合理的表达形式的体系，它的特例就是上面指出的那些"曲线的"坐标(我们暂时把词"曲线的"打上引号，因为这个概念没有严格地下定义，而仅仅是求助于直观).

2. 笛卡儿坐标和曲线坐标

我们研究欧氏空间 R^n 中的任意区域. 这里提醒一下，也象分析教程中一样，区域是欧氏空间中这样的任意集合 C，它的每一点 P 与以 P 为中心，足够小的半径的球一起包含在这个集合中. 我们考察用 R_1^n 表示的第二个欧氏空间. 给出区域C 中点 P 的坐标——它意味着将这个点与一个数组对应，这个数组也可称为坐

标. 显然,任意给出这个对应时(即没有任何其他条件),在对应可能是没有什么内容这个意义下我们就没有获得什么好的东西(希望引进的概念也象笛卡儿坐标在科学发展史上那样,带来某种好处,例如计算上的好处). 例: 区域C的每一点P与同一数组$(0,0,\cdots,0)$相对应,这样的例子是没有什么内容的. 要指出对应关系所应满足的第一个要求是: 这个对应要使区域中不同的点也对应不同的数组(坐标). 上面提到的例子(区域C中所有的点有同一个"坐标"——零坐标)是不满足这个要求的.

于是,我们希望区域C的每一点P与一个n实数组相对应. 显然,这确定了n个函数的组$x^1(P),\cdots,x^n(P)$,它们的定义域为区域C;这里$x^1,\cdots,x^n$是欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$的坐标.

通常要求它们是连续的甚至是光滑的(至少是对区域C的几乎所有点),即要求在点P的位置变动很小时,它的坐标变动也很小,甚至要求点P的光滑变动也引起它的坐标光滑变化.

这样,我们考察两个欧氏空间:具有笛卡儿坐标$y^1,\cdots,y^n$的$\boldsymbol{R}^n$和具有笛卡儿坐标$x^1,\cdots,x^n$的$\boldsymbol{R}_1^n$;设C是$\boldsymbol{R}^n$中的区域.

注 若把$\boldsymbol{R}_1^n$的点和由实数组成的长为n的序列等同起来以后,就可把欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$看作"算术空间".

定义1 若函数组$x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出了$\boldsymbol{R}^n$中区域$C$到欧氏空间$\boldsymbol{R}_1^n$中某区域$A$上的双方单值且连续的映射,则称此函数组为区域$C$的**连续坐标系**. 换句话说,$x^1(P),\cdots,x^n(P)$这函数组给出的映射有时称为区域$C$到区域$A$上的同胚(关于同胚的概念,以后将会讲到).

定义1简述了我们的希望,点P在区域C中连续变化时,它的坐标组的变化也同样是连续的. 函数$x^1(P),\cdots,x^n(P)$称为点P关于坐标映射$f:C\to A$的坐标.

例如,可以取由线性函数$x^1=y^1,\cdots,x^n=y^n$给出的恒等映射

作为坐标映射 $f:C\to A$.

若坐标映射 $f:C\to A$已经给定，有时我们将把带有坐标$x^1(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$的点 P 写成 $P(x^1,\cdots,x^n)$的形式.

从所有连续的坐标映射中，将从区域C到区域A上的光滑映射分出来，所谓光滑映射就是，所有函数$x^1(y^1,\cdots,y^n)$，$\cdots$，$x^n(y^1,\cdots,y^n)$是其自己的变量$y^1,\cdots,y^n$的光滑函数. 但是，有坐标映射f本身的光滑性而没有假定其逆映射f^{-1}的光滑性是不会给出坐标系的内容丰富的例子的，因此我们现在立刻转到定义这样的坐标系：它的两个映射f和f^{-1}都是光滑的. 为此，要求我们建立新的概念——光滑映射的 Jacobi 矩阵的概念.

设 $f:C\to A$ 是由函数组 $x^1(y^1,\cdots,y^n)$，$\cdots$，$x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出的光滑映射.

定义2 由坐标 $x^1(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$的偏导数组成的函数矩阵

$$df=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}^{①}$$

称为映射f的Jacobi矩阵. 这个矩阵的行列式用$J(f)$表示，并称为映射f的 Jacobi 行列式.

注 对Jacobi矩阵，我们引用的符号df不会与光滑函数f的微分记号引起混乱，因为光滑函数f的微分(在适当解释这个微分的时候)在这个特殊情况下也正好与 Jacobi 矩阵完全一样. 我们还要回到这个问题. 我们再一次指出，Jacobi矩阵是变的矩阵，即依赖于区域C中的点P；同样，映射f的 Jacobi 行列式是区域C

---

① 为使本书前后的 Jacobi 矩阵一致，这里的矩阵是原书中矩阵的转置.——译注.

上的光滑函数$J(f)(P)$，$P\in C$.

定义3 若光滑函数组$x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$给出区域$C$到欧氏空间$R_1^n$的某个区域$A$上的双方单值的映射，并且映射的Jacobi行列式$J(f)(P)$在区域$C$的所有点不等于0，则称此光滑函数组为欧氏空间$R^n$中区域$C$的**正则坐标系**.

我们指出，映射f的Jacobi行列式在区域C中所有点不为0的要求，自动地表示f的逆映射f^{-1}不仅是连续的，而且也是光滑的. 这事实可从隐函数组的定理得到，于是，正则坐标系是由两个光滑的互逆映射给出的，它们建立起区域C和A之间的同胚. 定义3简述了我们的希望，当点P在区域C中光滑地变化时，它的坐标组的改变也是光滑的，并且"坐标点"B在区域A中光滑地变化时，对应的(在映射f^{-1}下)点P也光滑地改变. 现在我们指出，因为从上面的定义可以看出"光滑并正则的坐标系"概念本身自动地假设了已给出至少两个标准欧氏空间，它们的某个区域借助于连续且双方单值的映射而重合，对此映射再附加光滑的要求(双方都光滑).

我们给出的定义还可用另外的观点来解释. 可以认为，在欧氏空间R^n的区域C中，从一开始已引进了笛卡儿坐标系(当两个欧氏空间R^n和R_1^n自然重合时利用C到A上的恒等映射). 那么，再在区域C上引进由正则映射f(即光滑的，双方单值的，Jacobi行列式不为0的映射)给出的坐标系，它可看作坐标变换：从原来的笛卡儿坐标"变为"一个区域C上的某个新的坐标系.

定义4 区域C上的正则坐标系有时也称为区域C上的**曲线坐标系**.

现在，在区域C上考察两个任意的曲线坐标系：$x^1(P)$，$\cdots$，$x^n(P)$和$z^1(P),\cdots,z^n(P)$. 这就是说给定了两个正则映射：f和g，$f:C\to A\subset R_1^n(x^1,\cdots,x^n)$；$g:C\to B\subset R_2^n(z^1,\cdots,z^n)$，即映射$f$

和 g 分别在区域 C，A 与 C，B 间建立了双方单值、双方光滑的对应. 换句话说,区域 C 的每一点 P 与两个曲线坐标系 $\{x^i(P)\}$ 和 $\{z^i(P)\}$ 相对应，这里 $1\leqslant i\leqslant n$. 因为对应是双方单值的，就可研究点 P 的坐标 $\{x^i(P)\}$ 与它的坐标 $\{z^i(P)\}$ 之间的对应，从而确定了映射 $\psi_{x,z}:A\to B$，即 $\psi_{x,z}:x^i(P)\to z^i(P)$，$1\leqslant i\leqslant n$. 称如此确定的映射 $\psi_{x,z}$ 为区域 C 上的**坐标变换**. 在这个变换下，点 P 得到的不是原来的曲线坐标 $\{x^i(P)\}$，而是新的曲线坐标 $\{z^i(P)\}$.

引理 1 映射 $\psi_{x,z}$ 是区域 A 到 B 上的双方单值、双方光滑、Jacobi 行列式不为 0 的映射.

证明 映射 $\psi_{x,z}$ 的双方单值性直接由定义 3 得到. 映射 $\psi_{x,z}$ 的光滑性由两个光滑映射的合成仍为光滑映射得到. 剩下验证映射 $\psi_{x,z}$ 具有非 0 的(在区域 A 中每一点)Jacobi 行列式 $J(\psi_{x,z})$.

实际上，映射 $\psi_{x,z}$ 由两个映射合成：$\psi_{x,z}=g\circ f^{-1}:A\to B$(图 5). 映射 $\psi_{x,z}$ 的Jacobi矩阵分解为映射 f^{-1} 的Jacobi矩阵和映射 g 的Jacobi矩阵的乘积. 现在 $d\psi_{x,z}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，我们看 $\frac{\partial z^i}{\partial x^j}$，因为 $z^i=z^i(y^1,\cdots,y^n)=z^i(y^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^n(x^1,\cdots,x^n))$，其中函数 $\{y^\alpha(x^1,\cdots,x^n),1\leqslant\alpha\leqslant n\}$ 给出了光滑映射 $f^{-1}:A\to C$，所以按复合函数的微分公式得到：$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$，这就是说 Jacobi 矩阵 $d\psi_{x,z}$ 分解为两个矩

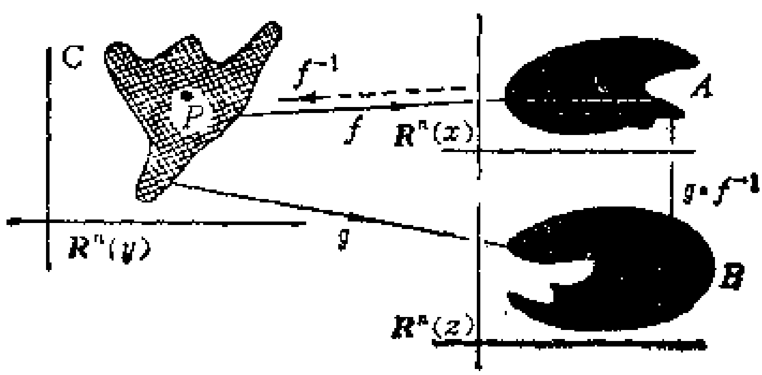


图 5

阵 dg 和 df^{-1} 的乘积. 这里利用了矩阵乘积的元素用两个矩阵的元素来表示的公式. 现在只须说明Jacobi 矩阵 df 和 df^{-1} 的关系即可. 因为合成映射$f^{-1}\circ f$ 是区域C 到自身的恒等映射(参看正则坐标系的定义), 那么, 按已证明的公式得到 $d(f^{-1}\circ f)=df^{-1}\circ df=E$, 这里$E$为 n 阶单位矩阵, 最后得到$df^{-1}=(df)^{-1}$. 这就证明了矩阵 $d\psi_{x,z}$ 满足恒等式$d\psi_{x,z}=(dg)\cdot(df)^{-1}$, 于是 $J(\psi_{x,z})=J(g)/J(f)$, 并且因为两个 Jacobi 行列式 $J(g)$和$J(f)$都不为零, 所以 Jacobi 行列式$J(\psi_{x,z})$也不为零. 引理得证.

如果给出了区域C 到区域A 上的映射f, 它建立了区域C 中的曲线坐标, 那么把区域A 映到C 上的映射 f^{-1} 可认为在区域A中建立了(借助于区域C 的笛卡儿坐标)曲线坐标. 今后常常将利用这个简短的论述从映射 f 转到逆映射 f^{-1}.

假设在区域C 上给出光滑的函数组: $\{x^i(P)\}, 1\leqslant i\leqslant n$. 如何知道这组函数是否给出$C$ 中的正则坐标系?

引理2 假设光滑的函数组$\{x^i(P)\}, 1\leqslant i\leqslant n$, 具有性质: 这函数组的 Jacobi 行列式 $J(f=\{x^i(P), 1\leqslant i\leqslant n\})$在区域$C$ 中不为零. 那么, 在区域C 的每一点P存在这样的开邻域, 在此邻域中函数组$\{x^i(P)\}$给出了正则坐标系(这样的坐标系可称为"**局部坐标系**").

证明 在引理的条件中没有假定函数组$\{x^i(P)\}$确定(即使是局部)区域C 到欧氏空间 R^n_1 的区域A 上的双方单值的映射, 但按隐函数组定理(也是逆映射存在定理), 从 Jacobi 行列式不为零可得(至少在某个开邻域中)逆映射的存在性以及光滑性. 于是引理的结论可以从正则坐标系的定义得到.

注意, 满足引理 2 条件的函数组决不必然立刻就确定为整个区域C 中的正则坐标系, 就是说区域A 到区域C 上的光滑映射f^{-1} 也可能不存在. 实际上, 看一个简单的例子: 把在挖掉坐标原点O

的二维笛卡儿平面取作为区域C，而取作为映射f(这里由两个函数：$x^1(P)$，$x^2(P)$给出)的是光滑映射$f(y^1,y^2)=(x^1(y),x^2(y))$，这里$x^1(y^1,y^2)=(y^1)^2-(y^2)^2$；$x^2(y^1,y^2)=2y^1y^2$；也就是若设$z=y^1+iy^2$，$w=x^1+ix^2$($i$是虚数单位)，那么$w=z^2$. 这个映射把复数$z$变换成它的平方(为方便起见，可以认为两个欧氏平面$\mathbf{R}^2(y)$和$\mathbf{R}^2(x)$是重合的). 在平面极坐标$(r,\varphi)$下可方便地写出这个映射，得到$f(r,\varphi)=(r^2,2\varphi)$；图6在几何上表示了映射$f$的运算. 我们来求映射的Jacobi行列式$J(f)$(例如，在$R^2(y)$上原来的笛卡儿坐标系$y^1$，$y^2$中计算). Jacobi矩阵$df$具有形式：

$$df=\begin{pmatrix}2y^1 & 2y^2\\ -2y^2 & 2y^1\end{pmatrix},$$

即 $$J(f)=4(y^1)^2+4(y^2)^2>0.$$

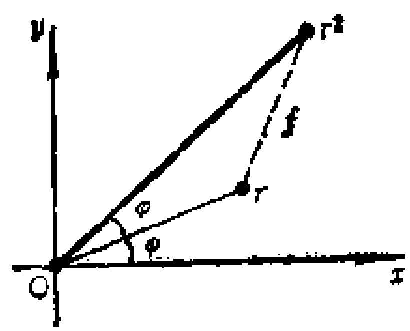


图 6

我们看到，Jacobi行列式在区域C中所有的点是正的(因为原点不在其内). 因此，按引理2我们的映射在区域C的每一点的某个开邻域中建立了局部(正则的)坐标系. 然而这时，映射f没有逆映射f^{-1}，因为f不是双方单值的. 实际上，每一个点(不是坐标原点)$w=x^1+ix^2\in\mathbf{R}^2(x)$在映射$f$下总有两个原象，这就是点$(r,\varphi)$和$(r,\varphi+\pi)$，当然这两点是区域$C$中的不同点. 于是，假如给出了具体的函数组，要求它们作为欧氏空间的某个区域C中正则坐标系，那么为了验证这一点，不仅要确认这函数组的Jacobi行列式不为零(在区域C中的所有点)，而且要验证这组函数给出的映射是双方单值的. 我们还指出，例子中所导出的函数组的Jacobi行列式，当P点逼近零(原点——译者注)时，趋于0. 在几何上已知有下面的问题：欧氏空间到自身的光滑映射f，在对Jacobi行列式加上条件$0<\varepsilon\leqslant J(f)\leqslant N<\infty$且其中$\varepsilon$和$N$是常数时，是否双方单值

的？这里我们将不讨论这个问题.

区域C中的每个曲线坐标系确定了所谓曲线坐标族，第i个坐标曲线由方程$x^1(P)=c_1$，$x^2(P)=c_2$，…，$x^{i-1}(P)=c_{i-1}$，$x^i(P)=t$，$x^{i+1}(P)=c_{i+1}$，…，$x^n(P)=c_n$给出，其中所有的c_i是常数，而t是连续参数. 随着t的变化，点P跑过区域C中某条光滑的轨线. 于是，从区域C中每一点P走出n条光滑的轨线，这些轨线也称为给定坐标系的坐标曲线（在P点）. 对另外的点P，有另外的坐标曲线系，并且当P点变化时，这个坐标曲线系光滑地变形. 例如，若坐标系是笛卡儿坐标系，那么它的坐标曲线是直线，过P点，并且平行于坐标轴. 在直观描述曲线坐标系时，画出坐标曲线常常是有益的，特别是坐标曲线的变换，在画出的坐标网下看起来尤其直观（例如，参看图7）.

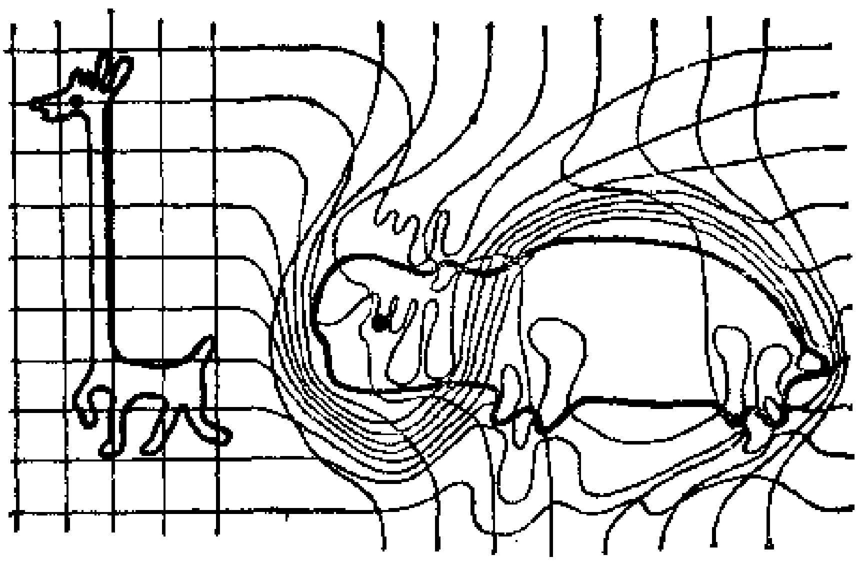


图 7

3. 曲线坐标系的最简单例子

这一段，我们从下面的评注开始：欧氏平面上的极坐标系(r,φ)不是整个平面R^2上的正则坐标系. 实际上，我们可考察由极坐标系到笛卡儿坐标系的坐标变换函数. 这些函数是：$x^1=r\cos\varphi$，$x^2=r\sin\varphi$. 求这些函数的Jacobi行列式. 直接计算得

$$d\psi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix},\quad J(\psi)=r.$$

于是，Jacobi 行列式在坐标原点为0．因为笛卡儿坐标系 x^1，x^2 显然在平面 $R^2(x^1,x^2)$ 上(作为坐标系)是正则的，那么由此可见极坐标系不是正则的(在定义 3 的意义下)．但是，关系到极坐标系的麻烦事并没有到此结束．这个"坐标系"使整个二维欧氏平面到自身的映射不是双方单值的，因为形为(r,φ)和$(r,\varphi+2\pi)$的点变为同一点．

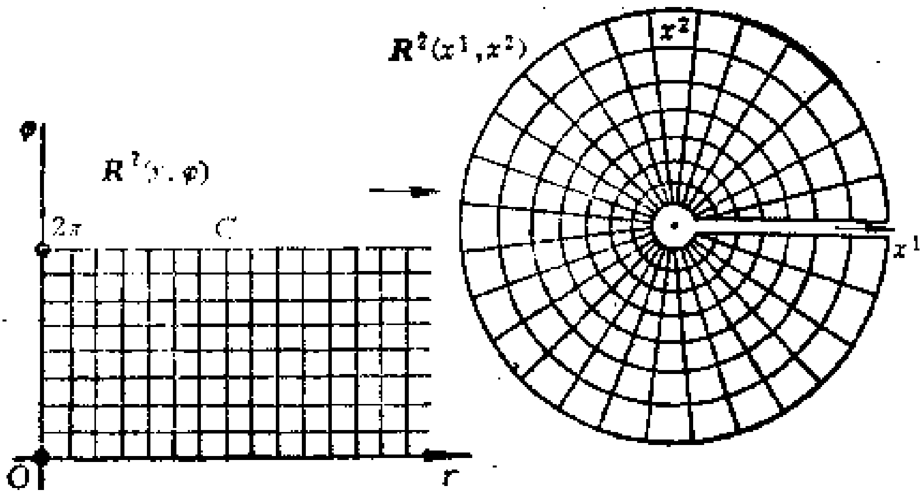


图 8

应该划分出使极坐标系是正则坐标系的区域 C．我们详细地分析这个例子．

我们考察欧氏平面 $R^2(r,\varphi)$，这里 $y^1=r$，$y^2=\varphi$，并且把由不等式 $0<\varphi<2\pi$，$0<r<+\infty$ 确定的无限带形看作为区域 C．那么在平面 $R^2(x^1,x^2)$ 上应该取除去半直线 $x^1\geqslant 0$，$x^2=0$ 的整个二维平面作为区域 A．映射 $f: C\to A$ 由公式 $x^1=r\cos\varphi$，$x^2=r\sin\varphi$ 给出．图 8 指出了在映射 f 下坐标系的坐标曲线的变化．笛卡儿坐标的直角坐标网变为极坐标网．映射 f 的双方单值性和正则性是明显的．

现在考察三维欧氏空间，并研究所谓柱面坐标系．变换公式为：$x^1=r\cos\varphi, x^2=r\sin\varphi, x^3=z$．研究 $R^3(y^1, y^2, y^3)$，这里 $y^1=r$，$y^2=\varphi$，$y^3=z$，并取区域 $(0<r;\ 0<\varphi<2\pi;\ -\infty<z<+\infty)$ 作为 C．上面引用的公式定义了光滑的映射 $f: C\to A\subset R^3(x^1, x^2, x^3)$，这里区域 A 由 $R^3(x^1, x^2, x^3)$ 中删去半平面而得到(图 9)．Jacobi 矩阵具有形式：

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其 Jacobi 行列式等于 r．于是，在区域 A 中柱面坐标系是正则的(Jacobi 行列式仅在 z 轴的点上等于 0)；整个空间除去半平面 $(\varphi=0, r\geqslant 0)$ 保证了双方单值对应．

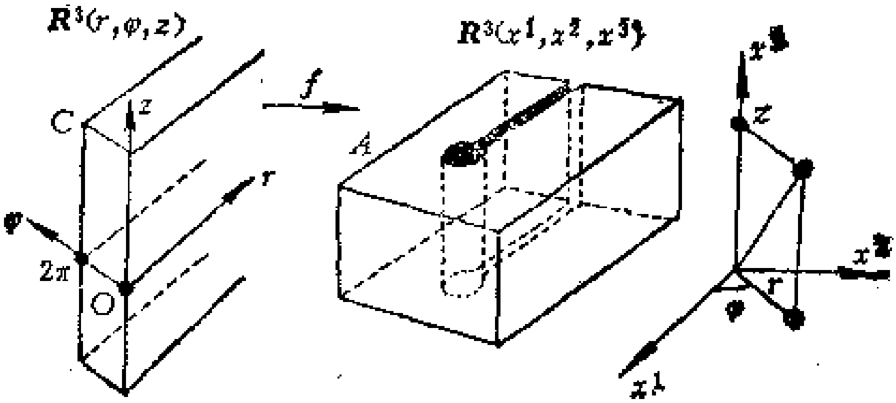


图 9

现在我们考察 n 维欧氏空间，并引进所谓球面坐标系．我们提出 n 维时的变换公式，并计算其 Jacobi 矩阵及 Jacobi 行列式，而分析区域 C 和 A 的结构(为了直观起见)仅对三维欧氏空间的情况进行．变换公式为：

$$f_n: C(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})\longrightarrow A(x^1, \cdots, x^n).$$

$$
\begin{cases}
x^1 = r\cos\theta_1, \\
x^2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
x^3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\
x^n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{cases}
$$

注 这组公式的构造是清楚的，认为每一行都有相同的来历，只是参数θ_i，在足标$i=n$时，等于0，这种看法是适宜的。Jacobi矩阵具有形式①

$$
J_n = \begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 \cdots\cdots & \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
-r\sin\theta_1 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 \cdots\cdots & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
0 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 \quad \cdots\cdots & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
0 & 0 \quad \cdots\cdots & -r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
J_n &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}J_{n-1} \\
&\quad + r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-1}J_{n-1} \\
&= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}J_{n-1}.
\end{aligned}
$$

$$J_2 = r;\quad J_3 = r^2\sin\theta_1;\quad J_4 = r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2;$$

$$J_5 = r^4\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3,$$

等等.

对三维欧氏空间，球面坐标常用(r,θ,φ)表示；此时变换公式具有形式：$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$；$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$；$x^3 = r\cos\theta$；$0<\theta<\pi$，$0<\varphi<2\pi$，$r\geqslant 0$．在这样的坐标下，$J = r^2\sin\theta$．我们来研究区域$C$和$A$的构造（参看图10）。这个变换的Jacobi行列式仅在x^3轴

---

① 为使全书的Jacobi矩阵一致，译文中的矩阵是原书中矩阵的转置，原书中的矩阵行列式的计算有误，译文中作了修改——译注。

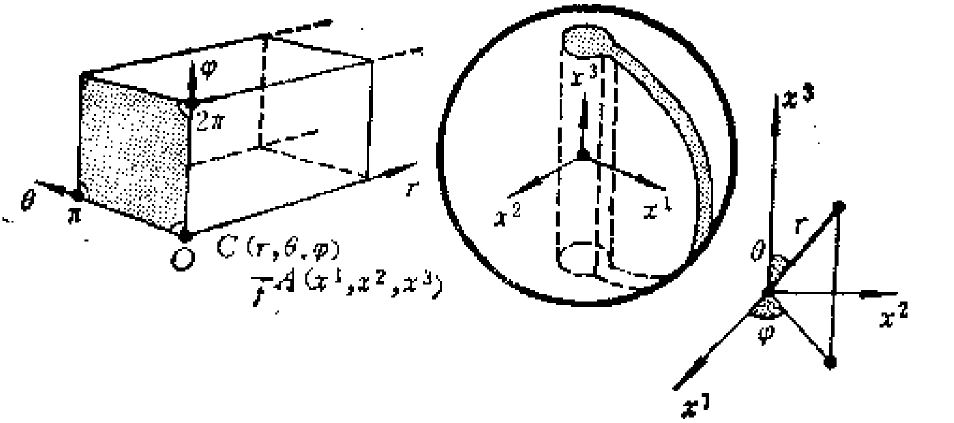


图 10

上为0；为了保证坐标系的双方单值性，还要除去属于半平面($x^2=0, x^1\geqslant 0$)的点. 在固定 r 时，参数 θ,φ 的坐标曲线具有图 11 所指出的形式. 这两个角参数有时称为纬度和经度(它们在地球仪上给出坐标网). Jacobi 矩阵(在三维的情形)具有形式:

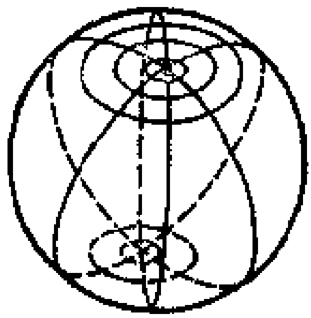


图 11

$$d\psi=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

§1 习 题

1. 证明函数组 $u=x+\sin y, v=y-\frac{1}{2}\sin x$ 在平面上是正则坐标系.

2. 证明在圆周 S^1 上不能给出一个统一的坐标系.

3. 在极坐标系下写出 Laplace 方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

§2 在曲线坐标系中曲线的长

1. 在欧氏坐标系中曲线的长

我们考察欧氏空间 R^n, 并在 R^n 中给出欧氏数量积: $\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle=$

$\Sigma\xi^i\eta^i$，$\xi,\eta\in\boldsymbol{R}^n$．此时，可以将每个向量 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 与一个实数相对应．此实数称为它的模或长，且由公式 $|\vec{\xi}|=\sqrt{\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle}$ 所确定．此公式给出从点 O 到点 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 的向量的长．如果我们想确定任意两点 $\xi,\eta\in\boldsymbol{R}^n$ 之间的距离，那么就应计算向量 $\vec{\xi}-\vec{\eta}$ 的长．从解析几何知道，两个向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}\in\boldsymbol{R}^n$ 之间的角 φ，也能用数量积由公式 $\cos\varphi=\dfrac{\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle}{|\vec{\xi}|\cdot|\vec{\eta}|}$ 来表示．我们看到，像向量的长和向量间的角这样重要的度量概念是与欧氏空间中的数量积紧密联系着的．在建立其他重要的几何概念时，常常正是以向量的数量积作为这些概念的定义之基础的．

在欧氏空间中除了直线段的长度外，善于计算光滑曲线的长也是有用的．我们来给出光滑曲线长的定义．为此，以参数形式给出曲线 $\gamma(t)$，即认为欧氏空间中的**光滑曲线**由一组 n 个光滑函数 $x^1(t),\cdots,x^n(t)$ 给出，其中参数(时间)跑过整个实数轴或一个区间 $[a,b]$（后一种情况对我们特别重要）．同时认为 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的笛卡儿坐标．

定义 1　数 $l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle}\,dt$ 称为曲线 $\gamma(t)$ 从点 $\gamma(a)$ 到点 $\gamma(b)$（或从参数值 $t=a$ 到参数值 $t=b$）的**长**，其中 $\dot{\gamma}(t)$ 是具有坐标 $\left(\dfrac{dx^1(t)}{dt},\cdots,\dfrac{dx^n(t)}{dt}\right)$ 的向量，有时称为曲线 $\gamma(t)$ 在点 t 的**速度向量**，或称为曲线 $\gamma(t)$ 在点 t 的**切向量**．

于是，我们称曲线的速度向量长的积分（或速度向量模的积分）为曲线的长．曲线长的显式公式为：

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt.$$

引理 1　给定光滑曲线 $\gamma(t)$，$\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 是此曲线上相应于

参数值 a, b 的两点. 若 $t=t(\tau)$ 是参数 t 换为新的参数 τ 的任何光滑的变换，$\frac{dt}{d\tau}>0$，那么曲线长 $l(\gamma)\Big|_\alpha^\beta$ 不变，即总成立等式 $l(\gamma(t))\Big|_a^b=l(\gamma(\tau))\Big|_\alpha^\beta$，这里 $a=t(\alpha), b=t(\beta)$.

证明 直接计算，得

$$l(\gamma(t))\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\dot{\gamma}_t,\dot{\gamma}_t\rangle}\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot{\gamma}_\tau,\dot{\gamma}_\tau\rangle\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\frac{dt}{d\tau}d\tau$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot{\gamma}_\tau,\dot{\gamma}_\tau\rangle}\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot{\gamma}_\tau,\dot{\gamma}_\tau\rangle}\,d\tau,$$

其中 $\dot{\gamma}_t=\left\{\frac{dx^1(t)}{dt},\cdots,\frac{dx^n(t)}{dt}\right\}$. 这就是所要证明的.

现在假定给定了欧氏空间中的两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(\tau)$，它们相交于欧氏空间某点 P，即存在这样的参数值 $t=a, \tau=b$，使 $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$. 我们来定义两个曲线在它们交点处的夹角.

定义 2 两条相交的光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(\tau)$，在它们的交点 $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$ 处，若两个速度向量 $\dot{\gamma}_1(a)$ 和 $\dot{\gamma}_2(b)$ 不为零，由等式 $\cos\varphi=\frac{\langle\dot{\gamma}_1(a),\dot{\gamma}_2(b)\rangle}{|\dot{\gamma}_1(a)|\cdot|\dot{\gamma}_2(b)|}$ 确定的角 φ 称为此两条相交曲线在交点 P 的**交角**.

注 严格地说，这个等式确定的不是一个角，而是两个角，它们的和为 π. 但是若把曲线编上号码，那么就产生了有向角的概念，这样的角就由上面引进的公式所唯一确定了. 我们坚持两个速度向量在交点处不为 0 的要求. 问题在于在光滑曲线的速度向量变为 0 的点，这曲线可能受折损，其运动方向跳跃性地突然变化. 于是，在试图确定与此曲线在交点处的角时，产生了要在被转折点所分开的两个光滑曲线段中选择一个的不确定性(图 12).

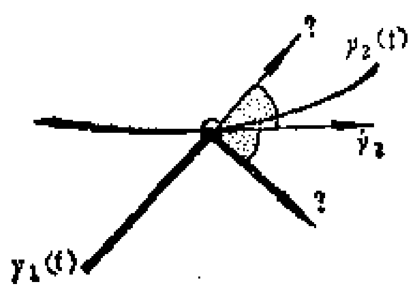


图 12

我们指出，在光滑曲线上存在转折点(在使速度向量为 0 的那些参数值处)决不违背曲线的光滑性(参看光滑曲线的定义)．例如，图 13 表示了在一点具有转折的光滑曲线；这里光滑曲线在奇

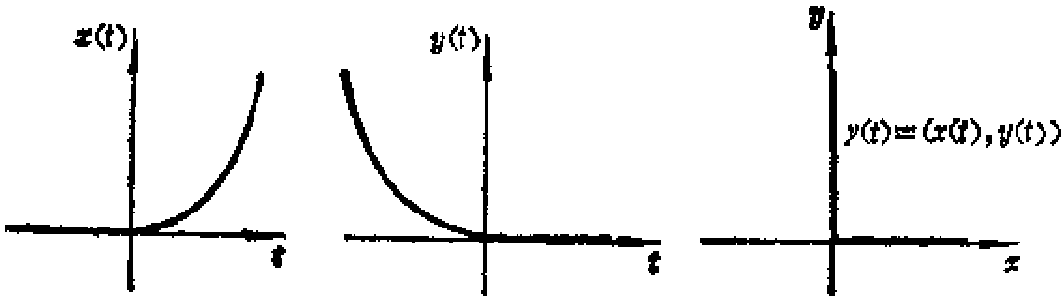


图 13

点的"转折角"等于 $\pi/2$．容易构造出在奇点有转折角 π 的光滑曲线的例子(参看图 14)．(给读者的课题：写出图 14 中所描绘曲线的参数方程．问题：图 14 中所描绘的曲线能用解析函数 $x(t)$，$y(t)$ 给出吗？)

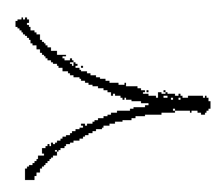


图 14

现在讨论这样的问题：上述曲线长的定义在多大程度上适合于关于长的直观概念，这个直观概念就是基于欧氏空间线段长的概念以及不能拉伸的细线的概念，利用这样的细线可以度量比线段更为复杂的曲线的长．此外，我们也知道，圆周的长有时是作为内接(或外切)多边形的周长，当逼近圆周的凸多边形的边数趋于无穷时的极限来定义的．很自然地，我们从线段开始．

1．假设曲线 $\gamma(t)$ 由线性函数 $x^i(t)=\alpha^i t$ 给出，其中 $\alpha^i=$ 常数，$1\leqslant i\leqslant n$，$a\leqslant t\leqslant b$．那么计算此光滑曲线从参数值 $t=a$ 到参数值 $t=b$ 的长，得到

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n(\alpha^i)^2}\,dt=(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n(\alpha^i)^2}.$$

因为线段的始点是具有坐标 $\{\alpha^i\cdot a\}$ 的点，而其终点的坐标为点

$\{a^i \cdot b\}$，那么通常的(欧氏的)线段长等于$(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2}$，这与积分$l(\gamma)\Big|_a^b$的值相一致.

2. 在平面$\mathbf{R}^2(x,y)$上，假设曲线$\gamma(t)$由参数方程$x=R\cos t$，$y=R\sin t$给出. 直接计算积分得到$l(\gamma)\Big|_a^b=2\pi R(a=0,b=2\pi)$. 很显然，这与我们早先知道的半径为$R$的圆周长的表示式是一致的.

2. 在曲线坐标系中曲线的长

现在，考察欧氏空间的区域C中的任何曲线坐标系，并假设$\gamma(t)$是这个区域中的任何光滑曲线. 在这个曲线坐标系中如何写出光滑曲线$\gamma(t)$的长？为此，我们注意在坐标变换时，曲线$\gamma(t)$的速度向量的分量发生什么变化. 用$z^1, \cdots, z^n$表示曲线坐标，即$x^i=x^i(z)$；于是按复合函数的微分法则，有

$$\frac{dx^i(t)}{dt}=\frac{dx^i(z(t))}{dt}=\sum_k\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt},\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

即
$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i(z(t))}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_k\frac{\partial x^i(z(t))}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{m,p}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{m,p}g_{mp}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\,dt,$$

其中函数$g_{mp}(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$. 显然，这些函数关于指标$m,p$是

对称的，即 $g_{mp}=g_{pm}$；于是函数组 g_{mp} 可组成对称矩阵，今后用 $G=(g_{mp})$ 来表示它．在我们得到的公式中，矩阵 G 的系数是以 Jacobi 矩阵的元素的乘积和表示的．事实上，$d\psi_{z,x}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)$，于是矩阵 G 表示为两个矩阵乘积的形式：$G=A\cdot A^T$，这里 $A=d\psi_{z,x}$．很明显，矩阵 G 依赖于曲线坐标系 z，并且一般地说，在坐标变换时它是要改变的．那么，矩阵 $G(z)$ 的变化规律如何呢？我们再作一个变量替换，由变量 $\{z^i\}$ 变为变量 $\{y^k\}$，即考察形式为 $z^i=z^i(y^1,\cdots,y^n)$ 的正则坐标变换．同时，把 $\{y^k\}$ 看作区域 C 中的新的曲线坐标．

这时，系数 $g_{mp}(z)$ 按下面规则变化：

$$g_{lk}(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m,p}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}$$

$$=\sum_{m,p}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\right)\frac{\partial z^p}{\partial y^k}=\sum_{m,p}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}g_{mp}(z)\frac{\partial z^p}{\partial y^k}.$$

即 $G(y)=d\psi_{y,z}G(z)(d\psi_{y,z})^T$．

注 为了简化表示式 $\sum\limits_{(i)}a^ib^i$ 的记号，其中求和是按重复指标进行的，我们省略掉记号 Σ，并简写为 a^ib^i．以上面导出的公式之一 $g_{kl}(y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\dfrac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}$ 为例，考虑到这个规定，它可写为 $g_{kl}=\dfrac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\dfrac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}$．有时表示新的坐标为 $z^{i'}$，在指标上写上"一撇"，即表示是在新的坐标系中，例如 $g_{i'j'}$．

函数 $g_{mp}(z)$ 有明显的几何意义．我们考察区域 C 中的任意点 P 和曲线坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 的经过 P 点的坐标曲线．这些曲线中每一条都可用参数方程 $z^1=c_1,\cdots;\ z^{i-1}=c_{i-1},z^i=t,\ z^{i+1}=c_{i+1};\cdots;z^n=c_n$ 的形式给出，其中 $c_\alpha(1\leqslant\alpha(\neq i)\leqslant n)$ 是这样的常

数，它们为点 P（在坐标系 z 中）的坐标：$P:\{z^\alpha=c_\alpha;1\leqslant\alpha\leqslant n\}$. 我们用 $\gamma_m(t)(1\leqslant m\leqslant n)$ 表示第 m 条坐标曲线. 这时 z 坐标系中的第 m 条坐标曲线在 x 坐标系中写为：$\{x^i(c_1,\cdots,c_{m-1},z^m=t,c_{m+1},\cdots,c_n)\},1\leqslant i\leqslant n$.

这条光滑曲线在 P 点的速度向量的坐标 $\vec{e}_m=\left\{\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\right\},1\leqslant i\leqslant n$.

因为 $g_{mp}(x)=\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$，这个表示式也可写为形式：$g_{mp}(z)=\langle\vec{e}_m,\vec{e}_p\rangle$，也就是说，函数 g_{mp} 是相应的坐标曲线切向量的数量积（数量积是欧氏的，这是所在空间的特征）（图 15）.

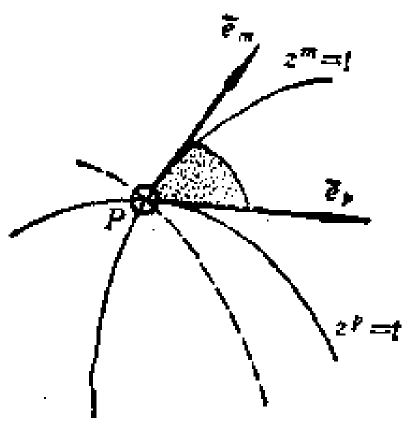


图 15

这样，我们看到在坐标变换时矩阵 $G(z)$ 象二次形式的矩阵那样变换. 特别，若原来是笛卡儿坐标，那么矩阵 G 是单位矩阵，于是在任何另外（曲线）坐标系中，它可以写为 $G(z)=AEA^T$，这里 $A=d\psi_{z,x}$，$\{x^i\}$ 是笛卡儿坐标（此时 $G(x)=E$）.

在作进一步讨论之前，我们先来考察在不同的曲线坐标系中曲线长公式的最简单的例子．对这些曲线坐标系顺便以显式算出矩阵 G.

1. 二维平面 $\mathbf{R}^2$ 上的极坐标 (r,φ). 在笛卡儿坐标 (x^1,x^2) 下，矩阵 G 为 $G(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，即 $g_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}0,i\neq j,\\1,i=j.\end{cases}$ 前面已计算过 Jacobi 矩阵：$d\psi=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-r\sin\varphi&r\cos\varphi\end{pmatrix}$；由此

$$G(r,\varphi)=d\psi(d\psi)^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-r\sin\varphi&r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-r\sin\varphi\\\sin\varphi&r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}.$$

于是在极坐标系中，所给曲线 $\gamma(t)=(r(t),\varphi(t))$ 的长，根据公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

2. 三维欧氏空间 R^3 中的柱面坐标 (r,φ,z). 矩阵 $G(x)$ 在笛卡儿坐标系 (x^1,x^2,x^3) 下为 $G(x)=E$. 前面已算出其 Jacobi 矩阵为

$$d\psi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

由此 $G(r,\varphi,z)=d\psi(d\psi)^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

于是在柱面坐标系下所给曲线 $\gamma(t)=(r(t),\ \varphi(t),z(t))$ 的长，根据公式可表示为

$$l(\gamma(t))\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

作为一个例子，我们来计算直圆柱面上螺线的长，此螺线由参数方程 $r(t)=R=\text{const}$; $\varphi(t)=\omega t$; $z=qt$ 所给出. 此时，

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{R^2\omega^2+q^2}\,dt=(R^2\omega^2+q^2)^{1/2}(b-a).$$

3. 三维欧氏空间 R^3 中的球面坐标 (r,θ,φ). 在笛卡儿坐标系 (x^1,x^2,x^3) 下，矩阵 G 为 $G(x)=E$. Jacobi 矩阵前面已算过，为

$$\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix},$$

由此

$$G(r,\theta,\varphi)=d\psi(d\psi)^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

于是在球面坐标系下，所给曲线 $\gamma(t)=(r(t),\ \theta(t),\ \varphi(t))$ 的长，按照公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

有时仅写出弧长微分 dl 的显式来代替弧的全长的表示式常常是方便的．特别是在上面所分析的例子中，这些微分（在相应的坐标系中）取如下的形式：在平面极坐标系中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2$；在 $\boldsymbol{R}^3$ 的柱面坐标系中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2+(dz)^2$；在 $\boldsymbol{R}^3$ 的球面坐标系中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$.

3. 在欧氏空间区域中的黎曼(Riemann)度量

这样一来，我们把区域 C 中的每一个曲线坐标系 z 与一个光滑的矩阵函数 $G(z)$ 相对应，这矩阵函数 $G(z)$ 在坐标变换时，象二次型（在每一点）那样变换．这一组矩阵函数的作用在于由它能够计算出在曲线坐标系中的曲线长．我们从这一组矩阵函数的所有性质中突出它象二次型（在每一点）那样变换的性质．现在考察满足这个性质的任意一组矩阵函数．

定义 2 如果在欧氏空间区域 C 的每个正则坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 中定义了一组光滑函数 $g_{mp}(z^1,\cdots,z^n)$，满足：(1) $g_{mp}(z)=g_{pm}(z)$（即矩阵 $G(z)$ 是对称的）；(2) 矩阵 $G(z)=(g_{mp})$ 是非退化的和正定的；(3) 在坐标变换 $z\to y$ 时，矩阵 $G(z)$ 按照规则 $G(y)=d\psi G(z)(d\psi)^T$ 变换（提醒一下，我们仅考虑坐标系的正则变换），这里 $d\psi$ 表示坐标变换的 Jacobi 矩阵 $d\psi_{y,z}$，那么我们说在欧氏空间

区域 C 中给出了**黎曼度量**.

定义 3 若在区域 C 中给出了黎曼度量 $G(z)=(g_{ij})$，并在坐标系 z 中给出了光滑曲线 $\gamma(t)=\{z^i(t)\}$，则称数

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(z)\frac{dz^i(t)}{dt}\frac{dz^j(t)}{dt}}\,dt$$

为曲线 $\gamma(t)$ 从点 $\gamma(a)$ 到点 $\gamma(b)$ 的**长**. 若两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 在某一点 $P\in C$ 相交（$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=P$，$\dot{\gamma}_1(0)\neq 0$，$\dot{\gamma}_2(0)\neq 0$），则称满足

$$\cos\varphi=\frac{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}{\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_1^j(t)}{dt}}\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_2^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}}$$

的数 φ 为（在所给黎曼度量下）曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 之间的交角.

上述黎曼度量的定义现在可以用比较地不变的述语来叙述，而不求助于度量的明显的坐标表示法. 这就是，黎曼度量的给出能够在经过区域中每一点的所有光滑曲线的切向量的集合上定义二次型 $\langle\ ,\ \rangle_g$. 确实，若 $\gamma_1(0)=P=\gamma_2(0)$，$P\in C$，则对向量 $\vec{\xi}=\dot{\gamma}_1(0)$ 和 $\vec{\eta}=\dot{\gamma}_2(0)$，这里 $\vec{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$，$\vec{\eta}=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$，可以令 $\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_g=g_{ij}\xi^i\eta^j$. 注意，向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的坐标是在坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 中计算的.

引理 2 映射 $\vec{\xi},\vec{\eta}\to\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_g$ 给出了光滑地依赖于点的非退化正定的二次型.

证明 所作映射的对称性和双线性由定义 2 得到. 我们来论断这个对应定义了双线性型. 作正则坐标变换 $\{z^i\}\to\{z^{i'}\}$，这时

$$\gamma_1(t)=\{z_1^1(t),\cdots,z_1^n(t)\},\quad \gamma_2(t)=\{z_2^1(t),\cdots,z_2^n(t)\};$$

$$\xi^{i'}=\frac{dz_1^{i'}}{dt}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\frac{dz^i}{dt}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\xi^i;\quad \eta^{i'}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\eta^i;\ g_{i'j'}=\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}g_{ij}.$$

由此得到

$$\langle\vec{\xi}',\vec{\eta}'\rangle_{g'}=g_{i'j'}\xi^{i'}\eta^{j'}=\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}g_{ij}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}\xi^k\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p}\eta^p$$

$$=\left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}\right)\left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p}\right)g_{ij}\xi^k\eta^p=\delta^i_k\delta^j_p g_{ij}\xi^k\eta^p$$

$$=g_{ij}\xi^i\eta^j=\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_g,$$

这就是说,$\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_g$确实是双线性型.在证明中利用了$\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}=\delta^i_k$,这由$(d\psi)(d\psi)^{-1}=E$得到. 引理证毕.

于是,黎曼度量的定义可用如下的术语给出:若在欧氏空间区域C中每一点,对切于过此点的光滑曲线的向量给出了非退化正定的双线性型(数量积),那么我们就说在区域C上给出了黎曼度量.

由引理2得到这个定义与定义2是等价的. 特别是,由引理2得到光滑曲线的长与坐标系的选择是无关的(若确立了黎曼度量,即它在某一个坐标系中给定,并且在坐标变换时按上面指出的规则变换).

黎曼度量存在吗?我们上面已经援引了例子. 事实上,若在区域C中的笛卡儿坐标下给出矩阵$G(x)=\delta_{ij}$(这里$x^1,\cdots,x^n$是区域C中的笛卡儿坐标),那么在由笛卡儿坐标系经正则变换得到的任何其他曲线坐标系z下,可以按定义令$G(z)=d\psi G(x)(d\psi)^T=d\psi(d\psi)^T$,这里$d\psi$是所给变换的Jacobi矩阵.因为很显然,任何正则坐标系z是从笛卡儿坐标系经正则变换而得到的(参看前面正则坐标系的定义),因而就定义了在任何正则坐标系下的矩阵函数$G(z)$. 由进行的论证得到黎曼度量应该适合的所有条件(1)—(3)都满足. 实际上,性质(1)和(2)可由$G(z)$的定义直接验证; 性质(3)可从两个坐标变换合成的Jacobi矩阵等于每一个坐标变换的Jacobi矩阵的乘积$d\psi_{z_1,z}=d\psi_{z_1,z_2}\cdot d\psi_{z_2z}$得到. 这样,我们就定

义了在欧氏空间区域中给定的黎曼度量. 这个度量是欧氏度量，并且光滑曲线弧长微分的平方在笛卡儿坐标系下写为$(dl)^2=\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$. 但是，若给出的是任意的黎曼度量，那么我们不应该希望通过区域C中适当的坐标变换使这个度量化为$\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$的形式.

定义 4 在区域C中给定黎曼度量G，若在区域C中存在这样的坐标系y（一般地说，是曲线坐标系），在此坐标系下$G(y)$变为单位矩阵，则称此黎曼度量G是欧氏的.

假使给出的是欧氏度量(相对于某个坐标系)，那么可以写出使这个度量也是欧氏的所有另外的坐标系(这样的坐标系很多). 这种描述将在以后给出，因为在当前不具备解决此问题所必需的知识. 这里我们仅指出，所有这样的坐标系可以从一个坐标系用欧氏空间的旋转、平移和反射的方法得到.

"非欧度量"，即在任何坐标系中都不能化成形式为$\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$的度量，它的存在性暂时还无从可推得. 目前我们还不能指出这样的黎曼度量，关于它可确定无疑地断定，它是非欧度量. 直观上很明显，为揭示出这样的度量，需要找出在坐标的正则变换下保持不变的属于这个度量的某种不变量. 那时，我们希望能比较两个度量的不变量，并揭示出这些不变量的不同，从而揭示出两个度量的不等价性. 这样的一些不变量实际上是存在的，并且我们能很快地确定它们. 只有到那时，我们才能严格地证明定义在欧氏空间区域中的非欧度量的存在性.

象早先指出的那样，在任意的坐标系z下写出的欧氏度量失去了它的简单的"欧氏形式"并由矩阵$G(z)$给出，这时"辨别"欧氏

度量就不那么简单，特别是在没有给出任何能区分不同度量(即不能在适当的坐标变换下从一个变到另一个的度量)的不变量的时候。我们来看看在上面所指出简单的曲线坐标系中如何写出欧氏度量。不写出黎曼度量的矩阵 $G(z)$，而写出光滑曲线弧长微分的平方 $(dl)^2=g_{ij}(z)dz^idz^j$ 常常是方便的。

1. 在平面极坐标系中：$(dl)^2=dr^2+rd\varphi^2$.

2. 在三维空间柱面坐标系中：$(dl)^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$.

3. 在三维空间球面坐标系中：

$$(dl)^2=dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).$$

4. 不定度量

到现在为止，我们遇到的仅是所谓黎曼度量的正定度量。特别是，我们所分析的所有的例子都是正定度量。但是在应用中常常遇到所谓不定度量。

定义 5 假设在欧氏空间区域 C 的每一个正则坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 中定义了一组光滑函数 $\{g_{mp}(z^1,\cdots,z^n)\}$，它们满足除正定要求外的加在黎曼度量上的所有要求(参看定义 2)，也就是说所对应的二次型不是正定的，那么就说在区域 C 中给出了**不定度量**.

我们考察伪欧空间 $\boldsymbol{R}^n_s$ 中的所谓指标 s 的伪欧度量作为不定度量的最简单例子。为了构造这个度量，考察下面的空间和度量就足够了：在笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 下的通常的欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$，并在每一点 $P\in\boldsymbol{R}^n$ 给出下面的双线性型(具有常系数，即与点无关的系数)：$\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_s=-\sum\limits_{i=1}^{s}\xi^i\eta^i+\sum\limits_{j=s+1}^{n}\xi^j\eta^j$. 于是，对任意的光滑曲线 $\gamma(t)=\{x^i(t)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，其弧长按公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{-\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2+\sum_{j=s+1}^{n}\left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\,dt.$$

在 $n=4$ 时，指标为 1 的伪欧空间有时称为Минковский (Minkowski)空间(在狭义相对论中)；同样我们也将考察 R_1^3 和 R_1^2，我们指出，指标为 0 的伪欧空间就是通常的欧氏空间.

注 对空间 R_{n-s}^n 的研究在某种意义下可归结为对空间 R_s^n 的研究. 因为在空间 R_{n-s}^n 中所有的长可以乘以 i(虚单位)；于是形式$\langle\ ,\ \rangle_{n-s}$可化为形式$\langle\ ,\ \rangle_s$. 所以为简单起见，可认为 s 满足不等式：$s\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$(整数部分).

也象在通常欧氏空间一样，在空间 R_s^n 中向量$\vec{\xi}$的长由公式 $|\vec{\xi}|_s=\sqrt{\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_s}$ 定义，但在 R_s^n 中不同于在R^n中，向量的长可以是零和虚数. 事实上，因为形式$\langle\ ,\ \rangle_s$不是正定的，所以，例如从坐标原点发出的所有向量$\vec{\xi}\in R_s^n$的集合分为$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_s<0$(**类时向量**)，$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_s=0$(**光向量**或**迷向向量**，$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_s>0$(**类空向量**)这三个不相交的集合. 这种情况导致了有零长，实长和虚长向量的情况. 确实，类时向量具有虚数长，光向量(迷向向量)具有零长，而类空向量具有实数长. 这三种类型的向量从它们在空间的位置来看也是相互隔离的. 我们来描述从坐标原点发出的这些向量的分布情况. 由定义知道，迷向向量填满了顶点在坐标原点的整个锥面：$-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2+\sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2=0$；类时向量位于锥面的"内部"，即在由坐标轴 $x^1,\cdots,x^s$ 确定的锥面腔内；而类空向量位于锥面的"外部"(图16). 单这一点就已经表明，不定度量确定了比欧氏度量多得多的各种几何(在度量的意义下).

注 在(狭义相对论中的)Минковский 空间R_1^4中，迷向锥面全部由所谓"光向量"$\vec{\xi}$(即$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1=0$)组成，并称为**光锥**，因为由坐标原点发出的光线，将沿此锥面的一条母线传播(假设取参数ct

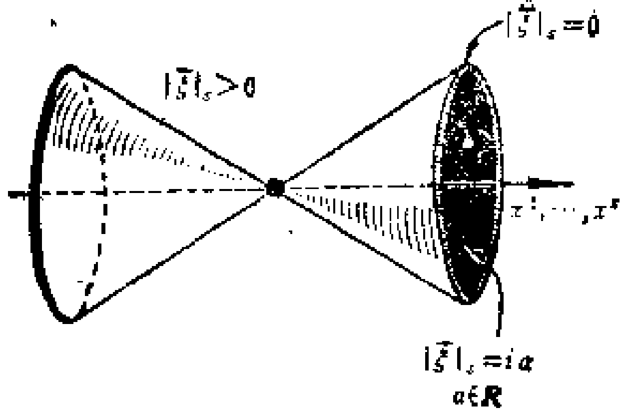


图 16

作为坐标 x^1, c 是表示光速的常数).

也象欧氏空间一样,现在可以定义指标 s 的伪欧空间 R^n_s 中任意光滑曲线的长

$$l_s(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle_s}\,dt.$$

与欧氏情形不同之处在于:某条曲线的长可能是零,纯虚数和复数. 实际上,由于沿着曲线的积分的可加性,它可分为几个被加项的和(为简单起见,假定被加的项数是有限的),其每个被加项的特征是,在被分出的曲线段上每一点的数量积 $\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle_s$ 不改变符号(同样可分出有零长的曲线段). 于是,在一般情形,曲线的长可以用复数写出.

为了更方便地表示狭义相对论的某种效应而引进的空间 R^4_1,在科学发展史上起了很大的作用. 我们在空间 R^4_1 中引入坐标 $x^0=ct, x^1=x, x^2=y, x^3=z$, 就是说 $(dl)^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$, 其中 t 是时间, c 是光速, 在 R^4_1 中考察正交标架 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ (对 R^4 中欧氏度量而论, R^4 供给空间 R^4_1 的模型,为了说明的直观,使 R_1 与四维欧氏空间相合). 我们考察任何物质的微粒的所谓"宇宙线" $\gamma(t)$, 它是空间 R^4_1 中的光滑轨线. 如果坐标 x,y,z 解释为空间的坐标,那么微粒沿此轨线的运动可以解释为某个在三维欧氏空间中迁移的质点在时空中的进化. 象以前一样,假设 $\dot{\gamma}$

是轨线 $\gamma(\tau)$ 在点 τ 的切向量；那么因为在狭义相对论中采用任何信号的传播速度不能超过光速 c 的假说，所以

$$c\,dt > \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

这里 $(c\,dt, dx, dy, dz)$ 是沿着轨线 $\gamma(\tau)$ 在切向量 $\dot{\gamma}(\tau)$ 的方向上的无穷小位移向量的坐标. 换句话说，任何路程的长的上界可以用这样的距离来估计：光线在给定的时间区间内可成功地走过这个距离. 由此我们得到沿着任何物质微粒的宇宙线 $\gamma(\tau)$ 总是满足关系式 $-c\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$，即 $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle_1 < 0$. 这就是说，切于宇宙线的每个切向量是类时的向量. 由此也得到物质微粒的宇宙线总是取虚数长. 特别是，宇宙线全部严格地在光锥（迷向锥面）内传播，此锥面以 t 轴为自己的轴. 这个条件在宇宙线的每一点都应满足（参看图 17）. 我们指出，在伪欧空间的每一点都有确定的迷向锥面. 在后面的章节中，我们还要回过来更详细地研究Минковский 几何.

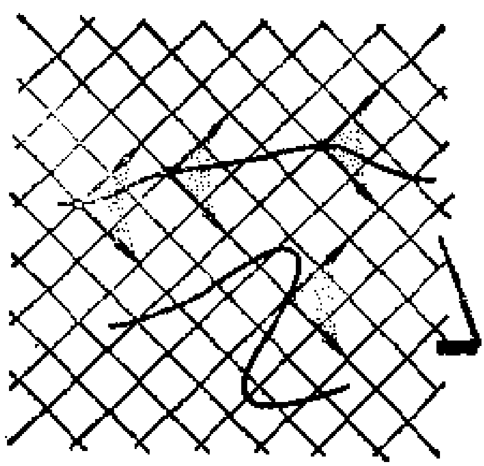


图 17 宇宙线. 图中下面的一条线是不可能的.

§2 习 题

1. 验证：曲线长可以作为依次连接曲线上有限个点的线段所组成的折线，当最长的线段趋于 0 时的极限.

2. 证明：在欧氏空间，连接两点的曲线中以直线的长为最短.

§3 球面和平面上的几何

开始，我们考察二维欧氏平面，它具有笛卡儿坐标 x, y，并被赋以欧氏度量 $dl^2 = dx^2 + dy^2$（注意，为表示光滑曲线弧长的无穷小元素，除用 dl^2 外，有时也用记号 ds^2. 我们将使用这两种符号）．这个黎曼度量（它的正定性是显然的）产生相应的数量积 $\langle\vec{\xi}, \vec{\eta}\rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2$. 给出数量积就很自然地产生圆周概念——作为长为 R 的向量终点的集合．若在平面上引进极坐标，则中心在原点的圆周成为形如 $r(t) = \mathrm{const}$ 的坐标曲线．在极坐标系中圆弧长的无穷小元素等于 $rd\varphi$.

现在，我们考察二维球面到三维欧氏空间中的**标准嵌入**，在引入笛卡儿坐标 x, y, z 的三维欧氏空间中，它是以坐标原点为起点长为 R 的向量终点的集合．在转到更详细地研究二维球面几何以前，先谈谈下面一般的问题．假设在球面 S^2 上有某条光滑曲线 $\gamma(t)$，并且我们所感兴趣的问题是计算这个曲线（或它的一部分）的长．因为事情是在欧氏空间进行的，于是可以考虑外围的三维欧氏度量 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$，而把光滑曲线写成参数形式 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$，并且按照上面所说明的方案计算我们所感兴趣的量．若我们想测量在球面上两条相交曲线 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ 的角（此时两条曲线整个都在球面 S^2 上）时，就正是这样处理的．为此，需要求出向量 $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ 的笛卡儿坐标（在三维欧氏空间），然后再利用外围的欧氏度量来计算这个角.

但是，同时应该注意，所有这些计算仅利用了集中于直接临近球面 S^2 上的欧氏度量的性质．换句话说，一开始就考察仅集中于二维球面上点的欧氏度量，并用这个球面上的坐标术语写出这个度量．因为球面 S^2 在 R^3 中用一个方程给出，于是表示球面上点的位置的参数个数为 2（即比三维空间中相应的参数数目少 1）．若

在 R^3 中引用球面坐标(r, θ, φ)就可以看出这是很明显的. 这时，半径为R的二维球面由一个方程$r=R=\text{const}$给出. 我们用显式来计算整个都在球面S^2上的两条曲线切向量（因而也与球面相切)的数量积. 设$\gamma_1(t)=(R, \theta_1(t), \varphi_1(t))$，$\gamma_2(t)=(R, \theta_2(t), \varphi_2(t))$，于是

$$\dot{\gamma}_1(t)=(0, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1), \quad \dot{\gamma}_2(t)=(0, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2),$$
$$\langle\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2\rangle=R^2(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\sin^2\theta(t)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2),$$

其中$(\theta(t), \varphi(t))$是曲线$\gamma_1(t)$与$\gamma_2(t)$交点的坐标. 由此可见，我们所计算的数量积与两个向量$(\dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1)$，$(\dot{\theta}_2\dot{\varphi}_2)$关于新的双线性形式$R^2(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\sin^2\theta(t)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$的数量积相符合. 这个双线性形式定义了二次形式$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$，它是由欧氏空间中的相应的二次形式$dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$用变量$\theta$，$\varphi$的新的函数$r=R=\text{const}, \theta=\theta, \varphi=\varphi$代替变量$r, \theta, \varphi$而得到. 我们说，引进这种运算以后所得到的球面$S^2$上黎曼度量$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$是外围三维空间的欧氏度量在球面上的**诱导度量**.

在球面S^2上，点的位置可用两个参数θ、φ(纬度和经度)给出，于是点在球面上的向径可以表示为$x=x(\theta, \varphi)=R\sin\theta\cos\varphi$，$y=y(\theta, \varphi)=R\sin\theta\sin\varphi$，$z=z(\theta, \varphi)=R\cos\theta$. 将此三个函数(依赖两个参数）代入三维空间中弧长微分的平方表示式$dx^2+dy^2+dz^2$，得到$(dx(\theta, \varphi))^2+(dy(\theta, \varphi))^2+(dz(\theta, \varphi))^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$.

这个具体的例子今后将被我们有力地概括，并且也是"诱导黎曼度量"的极其特殊的情况. 为此，在以后的章节中将引进严格的"曲面"概念，并将外围的黎曼度量限制在"曲面"上. 标准地嵌入在三维空间中的二维球面恰好也是"曲面". 不久我们将还导出另外"曲面"的例子，此"曲面"基本上是由几个变量的向量函数给出的. 例如，若在三维欧氏空间给出向量函数$x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，

$z=z(u,v)$，其中 u,v 在平面上的某个区域中变化，那么这个向径(在u,v变化时)将扫过某个集合$\left(\text{假设向量}\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\text{和}\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right.$在每一点$(u,v)$是线性无关的)．今后，我们也称它为三维空间的"二维曲面"(以后将给出一般的定义)．现在，若给我们这样的曲面(或其中一片)，那么在曲面上产生下面的欧氏黎曼度量诱导出的二次形式：$(dx(u,v))^2+(dy(u,v))^2+(dz(u,v))^2$.

于是，我们考察二维球面 S^2 到 R^3 中的标准嵌入，并给以诱导的黎曼度量．如上面已经计算过的那样，这个度量的显式为：$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$，这里 θ,φ 是球面坐标．在球面上同样也可引进另外的曲线坐标，这在具体计算时有时用得着．我们来导出这些坐标的基本例子．

首先，考察球面 S^2 到平面 R^2 的球极射影．为此，把半径为 R 的球面的球心放在坐标原点 O，并研究通过 O 点的坐标平面 $R^2(x,y)$；在球面 S^2 上也标出北极 N 和南极 S．设 P 为球面上不同于 N 的任意点；连接北极 N 和 P，并延长 NP，交平面 $R^2(x,y)$ 于 Q．将点 P 与点 Q 相对应，我们得到映射 $\varphi_0: S^2\to R^2$，并称它为球面到平面上的**球极射影**．由作图看出，映射 φ_0 在除北极 N 以外的球面的所有点上有定义．可以设想北极"映射"为二维平面的无穷远点(参看图 18)．我们写出映射 φ_0 的解析式．为此，应引进既在球面上也在平面上的坐标．例如，我们观察 R^3 中的球面坐标 r,θ,φ，这坐标同时诱导出球面 S^2 的坐标和平面 $R^2(x,y)$ 的坐标．事实上，在球面上出现坐标(θ,φ)，而在 R^2 上出现坐标(r,φ)(极坐标)．因为映射 φ_0 保持坐标 φ 不变，所以为了定义 φ_0，找出半径 r 依赖于角 θ 的明显关系式就足够了．为此，我们观察用过点 P,O,N 的平面去截 S^2 所得的截面(图 19)．因为角 ONT 等于$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$,

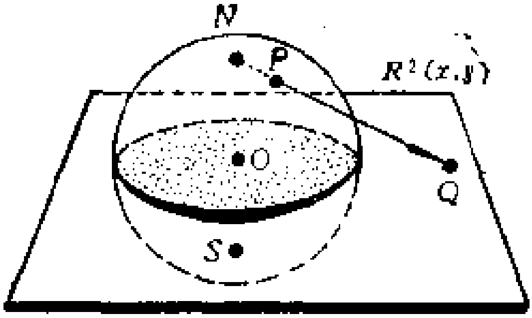


图 18

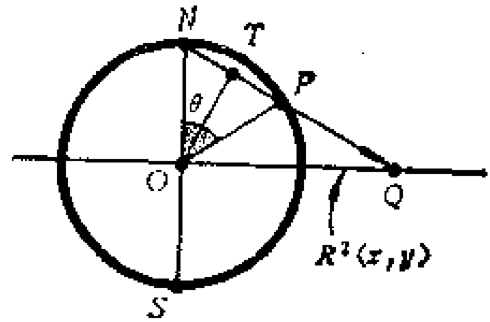


图 19

从而由直角三角形 ONQ 得到 $r=OQ=R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

于是看出坐标变换的最后公式为 $\varphi=\varphi$; $r=R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

我们来求这个变换的 Jacobi 矩阵. 它具有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{R}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \end{pmatrix},$$

就是说 $J=-\dfrac{R}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$; 于是在除北极外的所有点，变换是正则的.

因而借用欧氏平面极坐标，在球面上可以引进坐标. 在此新的坐标下球面的黎曼度量取怎样的形式? 我们有

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),\quad dr=\frac{-R}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}d\theta;$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{R^2}{R^2+r^2};\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{r^2}{R^2+r^2};$$

$$ds^2=\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2+r^2d\varphi^2).$$

应该注意，我们所得到的球面的度量形式仅在一个可变因子 $\dfrac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}$ 上不同于平面上在极坐标下写出的欧氏度量 $(dr^2+$

$r^2d\varphi^2$). 这样的两个度量称为是共形的.

定义 6 在欧氏空间区域 C 中的曲线坐标 $z_1,\cdots,z_n$ 下给出黎曼度量 $g_{ij}(z)$,它具有形式 $g_{ij}(z)=\lambda(z)g'_{ij}(z)$,这里 $\lambda(z)$ 是区域 C 中的光滑函数,而 $g'_{ij}(z)$ 是在坐标 $z^1,\cdots,z^n$ 下写出的欧氏度量的分量,则称 $g_{ij}(z)$ 为**共形度量**. 换句话说,若存在坐标系 x,使 $g_{ij}(x)=\lambda(x)\sum\limits_{k=1}^{n}(dx^k)^2$ 时,则称度量 $g_{ij}(z)$ 是共形的.

于是,在欧氏平面(引入极坐标)上,能够考察两个黎曼度量:$dr^2+r^2d\varphi^2$(欧氏的)和 $\dfrac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2+r^2d\varphi^2)$(球面度量). 两个度量可以认为给在同一个定义域 $\boldsymbol{R}^2(x,y)$ 上. 回到上面提到的问题——关于等价度量的问题上来. 是否存在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的正则坐标变换,使度量 $dr^2+r^2d\varphi^2$ 转化为度量 $\dfrac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2+r^2d\varphi^2)$?我们至少提出这两个度量不等价的这个事实的直观论据. 为此,我们用两个度量来计算圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的长:用欧氏度量和用"球面"度量. 在这里我们将圆周理解为在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的某个光滑曲线,它的长可以用 $\boldsymbol{R}^2$ 上所引进的不同的度量来计算. 把我们所感兴趣的量作为圆周半径的函数来求. 已知欧氏公式:$l_e=2\pi a$,a是半径(用欧氏度量来计算). 我们来求在"球面"度量中圆周的长. 首先,求出半径 a 的欧氏量和它在球面度量下的量 ρ 之间的关系式. 我们有

$$\rho=2\int_0^a\frac{R^2}{R^2+r^2}dr=2R\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right);$$

$$l_\sigma=2\int_0^{2\pi}\frac{R^2\cdot ad\varphi}{R^2+a^2}=\frac{4\pi aR^2}{R^2+a^2}=2\pi R\sin\frac{\rho}{R}①$$

---

① 原书为 $\sin\rho$,疑为笔误. 由译者改作 $\sin\frac{\rho}{R}$.

(参看图 20). 几何上，量 ρ 表示出圆周上从变点到北极之间连接的径线之长. 由我们在平面上用黎曼度量的语言形式上完成的计

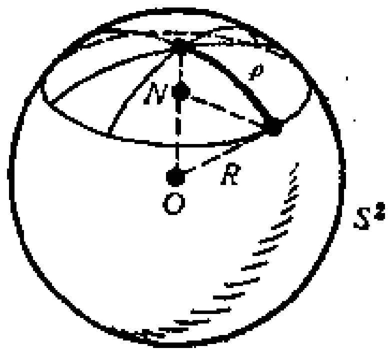


图 20

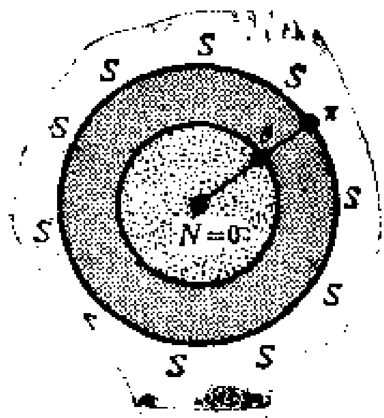


图 21

算，可以用初等几何的关系式来进行. 于是，若我们能用不依赖于局部坐标系选择的术语给半径为 a，中心在某点的圆周的内在定义，那么圆周长的公式同样也不依赖于局部坐标系的选择. 这样的定义是存在的. 我们称连接两点 P，Q 之间曲线的最小长为此两点间的距离(对连接两点的所有光滑曲线的长取最小的值). 那么，到点 P 的距离等于 a 的所有点 Q 的集合称为中心在 P 点半径为 a 的圆周. 为了应用这个定义于球面的情形，必须证明球面 S^2 上两点 P，Q 之间的距离等于过点 P 和 Q 的大圆弧长. 对此只要用由有限个大圆弧组成的折线来逼近连接 P 和 Q 的任何曲线即可.

特别，当 $\frac{\rho}{R}\to 0$ 时 (即对于半径和 R 比较起来是很小的圆周来说)，得到 $l_c \sim 2\pi\rho$，也就是说我们得到的公式转变为圆周长度的欧氏表达式. 比较两个公式："半径为 ρ 的圆周的'欧氏'长 $=2\pi\rho$" 和"半径为 ρ 的圆周的'球面'长 $=2\pi R\sin\frac{\rho}{R}$"，我们看到，这两个函数本质上是不同的；特别，一个是线性函数，而第二个是周期函数.

凸的球面不可能保持其曲线长而变形到欧氏平面某个区域，若回想一下，压扁一块球面成平面，需要怎样的力，与将直圆柱撑开展成平面要加怎样的力，两者比较一下，上面这个事实是可以想像的.

上面所进行的球面上圆周长的计算也可直接地在球面坐标(θ,φ)下进行，在此坐标下，球面的度量为$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$. 这个度量的定义域可认为是变量为$\theta$, φ的欧氏平面上半径为π的圆盘. 在这个坐标下，很明显，半径为θ的圆周长等于$2\pi R\sin\theta$(图21). 同时，点O自然地与球的北极相重迭，而边缘的圆周（半径为π)具有零长，因为$d\theta=0$, $\sin\pi=0$，因此整个这个圆粘合到一点，这点也与球的南极相重迭.

现在研究计算球面上光滑曲线长的问题. 取所谓斜驶线——与球面每一条经线交于同样的角α的轨线——作为例子. 问题：求这曲线从任何点$\gamma(a)$到$\gamma(b)$的长. 我们指出，这个曲线在航行理论上是很有名的——按照它可方便地开辟两个确定地点之间的飞机航线. 问题在于从实用的观点来看角α容易测量：它等于飞机的速度向量和指南针所确定方向之间的角. 因而，为了按照预先开辟的连接航行起点和终点的斜驶线航行，仅注意这样的一个参数就够了(这时，我们自然极力简化了现实的情况).

我们要求出斜驶线的显参数表达式. 为此，可方便地应用球极射影于球面(因而，也应用于斜驶线)，然后在平面上得到某条轨线，为方便起见，在此平面上引入极坐标(r, φ). 如上面所计算的，在这个坐标下，球面的度量有形式：$\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2+r^2d\varphi^2)$.

在球极射影时，经线化为过平面上坐标原点的射线. 我们断言，斜驶线的象是平面上的这样的曲线，它以同样的角α与所有的射线相交(并且，因此除允许旋转外由这个角唯一地确定). 这个结论

由球极射影保持相交曲线间的角度这个更一般的事实得到．这样的变换称为是共形的．更确切地说，我们所指的是：考察外围的欧氏度量在球面上所诱导的球面度量（参看上面），并假设两条相交曲线在交点的交角为 $\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$（假定角是定向的（参看图 22）数 $\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ 已在 §2 中定义．曲线 γ_1 和 γ_2 在映射 φ_0（球极射影）下变为某两条曲线 q_1 和 q_2，它们之间的夹角在平面欧氏度量 dl^2 下计算时，用 $\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ 表示．

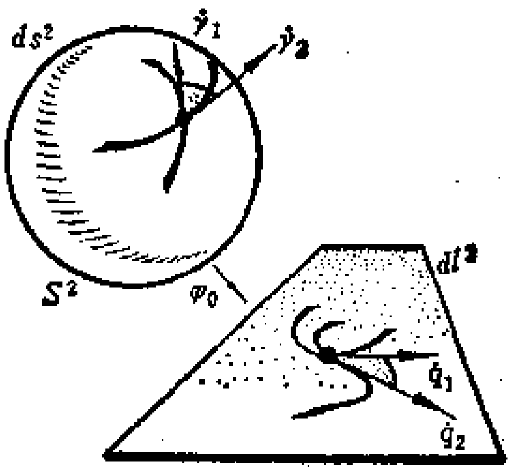


图 22

引理 1 对任何相交曲线 γ_1 和 γ_2，等式 $\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) = \beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ 总成立．

证明 比较角 α 和 β 的显式公式，并且利用经映射 φ_0 后在平面 R^2 的极坐标下的球面度量的公式就足以证明．我们有 $ds^2(r, \varphi) = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$，$dl^2(r, \varphi) = dr^2 + r^2 d\varphi^2$．很明显，$ds^2(r, \varphi) = \lambda^2(r) dl^2(r, \varphi)$．于是

$$\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) = \frac{\lambda^2(\dot{r}_1\dot{r}_2 + r^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)}{\sqrt{\lambda^2(\dot{r}_1^2 + r^2\dot{\varphi}_1^2)\lambda^2(\dot{r}_2^2 + r^2\dot{\varphi}_2^2)}} = \beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

引理得证．

实际上还成立更一般的结论．

引理 2 设 $g_{ij}(z)$ 和 $q_{ij}(z)$ 是欧氏空间区域 C 中曲线坐标 $(z^1, \cdots, z^n)$ 下的两个度量，若对每一点 $(z)\in C$，都成立 $g_{ij}=\lambda q_{ij}$，$\lambda=\lambda(z)$ 是光滑函数，则在这两个度量下计算的相交曲线间的角是一样的.

证明 逐字逐句地重述引理 1 中的推证即可.

现在回到斜驶线问题上来. 由于引理1，找出它在欧氏平面上的方程即可. 保持角 α 不变的条件就是 $\dfrac{\langle(\dot r,\dot\varphi),(1,0)\rangle}{\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}}=\cos\alpha=$ const，其中 $(\dot r,\ \dot\varphi)=\dot\gamma$ 是斜驶线的切向量，$(1,\ 0)$ 是射线 $(r=t,\ \varphi=\text{const})$ 的速度向量. 由此，$\dfrac{\dot r}{\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}}=\cos\alpha=\text{const}$，从而 $\dot r^2\sin^2\alpha=r^2\dot\varphi^2\cos^2\alpha$；$\dfrac{\dot r}{r}=\dot\varphi\,\text{ctg}\,\alpha$；$(\ln r)'=\dot\varphi\,\text{ctg}\,\alpha$，$r=c\cdot e^{\varphi\,\text{ctg}\,\alpha}$，这里 $c=\text{const}$. 令 $\varphi=t$，有 $\dot r=c\,\text{ctg}\,\alpha e^{\varphi\cdot\text{ctg}\,\alpha}$；$\dot\varphi=1$. 计算曲线的弧长，得到 $l(\gamma)\,|_{\varphi_0}^{\varphi}=c'\cdot e^{(\varphi)\cdot\text{ctg}\,\alpha}+c''$，其中 $c', c''=\text{const}$，问题：求出常数 c', c'' 的值.

§3 习 题

1. 证明：在球面 S^2 上由大圆弧组成的三角形的内角和大于 2π.
2. 在球面上，用三角形（由大圆弧组成）的面积来表示它的内角和.
3. 证明：球面上的相似变换的相似系数只可能等于 1.
4. 一般的问题：证明对任何黎曼度量可找到这样的坐标系，使得在此坐标系中在给定的点的黎曼度量的矩阵为单位矩阵.

§4 伪球面和лобачевский几何

我们考察指标 s 的伪欧空间 R^n_s. 欧氏空间 R^n 中的球面 S^{n-1}（超球面）可定义为到坐标原点距离为 ρ 的点的集合. 在伪欧空间，同样可以考察到坐标原点距离为 ρ 的点的集合（但现在的数 ρ 不

仅可以为实数，也可是虚数或零）．这个点的集合称为指标为 s 的伪球面，并用 S_s^{n-1} 表示．很明显，$S_0^{n-1}=S^{n-1}$．今后将以实半径，虚半径和零半径来区分伪球面．零半径的伪球面用二阶方程 $-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2+\sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2=0$ 表示，其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的笛卡儿坐标，在 $\boldsymbol{R}^n$ 上我们也制作了伪欧空间 $\boldsymbol{R}_s^n$ 的模型．很明显，零半径的伪球面与迷向（零）锥面一致．

我们分别考察几个特例．设 $n=2$, $s=1$．迷向锥面由两条直线 $x^1=\pm x^2$ 组成（我们考察引入笛卡儿坐标 x^1, x^2 的二维平面 $\boldsymbol{R}^2$，并在此平面上制作指标 1 的伪欧几何模型）．这个锥面分 $\boldsymbol{R}^2$ 为两部分：在其一部分中，$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1>0$（即由不等式 $|x^2|>|x^1|$ 所定义的区域），而另一部分 $\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1<0$（即由不等式 $|x^2|<|x^1|$ 所定义的区域）（图 23）．实半径的伪球面——这是双曲线：$-(x^1)^2-(x^2)^2=$

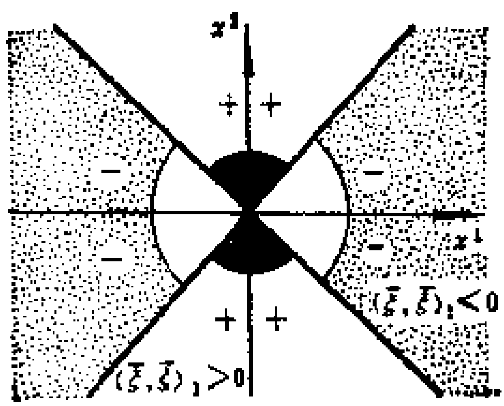


图 23

α^2，其中 α 是实数．虚半径的伪球面——这是双曲线：$-(x^1)^2+(x^2)^2=-\alpha^2$（图 24）．

现在设 $n=3$, $s=1$．迷向锥面（零半径的伪球面）——这是通常的二阶锥面，其方程为 $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$，轴为 x^1 轴．它也分整个空间为两部分（在现在情况下，利用习惯的术语，可以说：

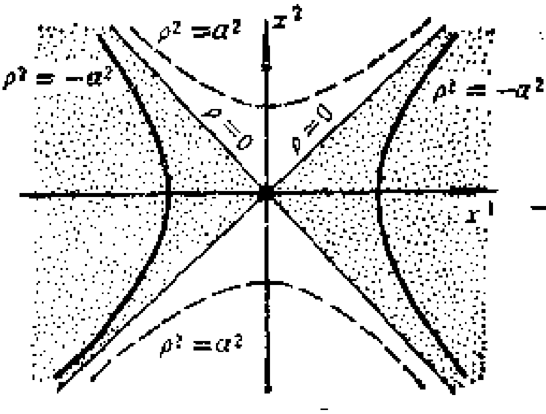


图 24

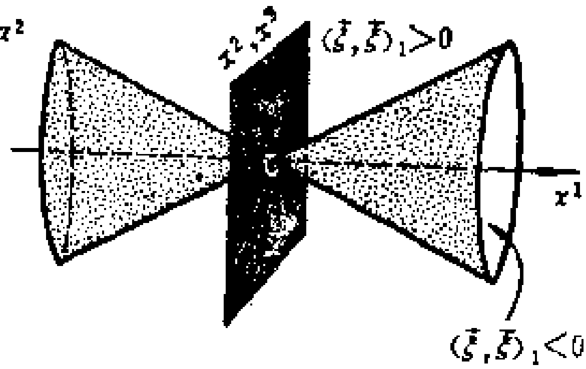


图 25

"分为内部和外部")(图 25). 实半径伪球面——这是单叶双曲面: $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=+\alpha^2$. 虚半径伪球面——这是双叶双曲面: $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-\alpha^2(\rho^2=-\alpha^2)$ (参看图 26). 现在研究空间 $\boldsymbol{R}_1^3$的度量性质,重新在 R^3 上制作 $\boldsymbol{R}_1^3$的模型: 用 x, y, z 表示 $\boldsymbol{R}^3$ 的笛卡儿坐标; 此时$\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle_1=-x^2+y^2+z^2$.

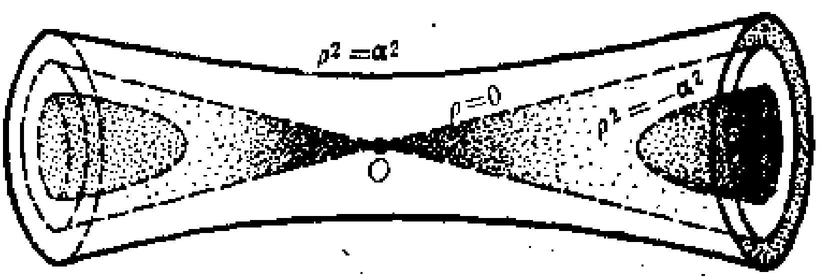


图 26

考察虚半径伪球面,这是双叶双曲面,其方程为$-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$. 因为它嵌入在 $\boldsymbol{R}_1^3$中,所以可以说"空间 $\boldsymbol{R}_1^3$的几何诱导出虚半径伪球面上的某种几何". 从 $\boldsymbol{R}_1^3$ 给出的不定度量的观点来看, 这个意义可叙述为"$\boldsymbol{R}_1^3$的度量在伪球面上诱导出某个度量". 其实,甚至不具有黎曼度量的概念, 我们也能赋予词"在双曲面上诱导的几何"以某种富有内容的意义,我们考察伪球面$-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$(为简单起见,仅限于研究其一叶, 例如由不等式 $x>0$ 所

确定的一叶)；我们称双曲面上的通常点为诱导几何的"点"；而称双曲面与过原点的形如 $ax+by+cz=0$ 的平面相交的所有可能的线为诱导几何的"直线"(图 27). 看来，在伪球面上这样产生的几何可以用解析几何方法来研究(即没有涉及黎曼度量的概念)，与通常球面上的几何相似地进行得相当深入. 为此，适当地作出类似于球面到平面上的球极射影的变换. 把 O 点(坐标原点)看作为伪球面 $S_1^2=\{-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2\}$ 的中心；具有笛卡儿坐标 $(-\alpha, 0, 0)$ 的点作为北极 N；具有笛卡儿坐标 $(\alpha, 0, 0)$ 的点作为南极 S；取过伪球面中心的平面 YOZ 作为在其上实现射影的平面(顺便提一下，数量积 $\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_1$ 在平面 YOZ 上的限制恰好有形式 $\xi^2\eta^2+\xi^3\eta^3$，就是说，伪欧数量积 $\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle_1$ 在平面 YOZ 上诱导出欧氏数量积). 现在考虑双曲面之右边部分上的变点 P，并连接 P, N(即连接点 P 与北极 N). 那么线段 $\overrightarrow{PN}$ 交平面 YOZ 于一点，用 $f(P)$ 表示，并称

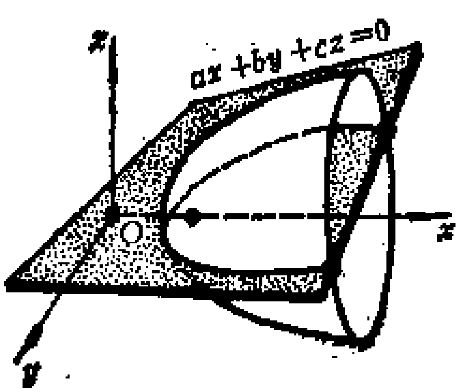


图 27

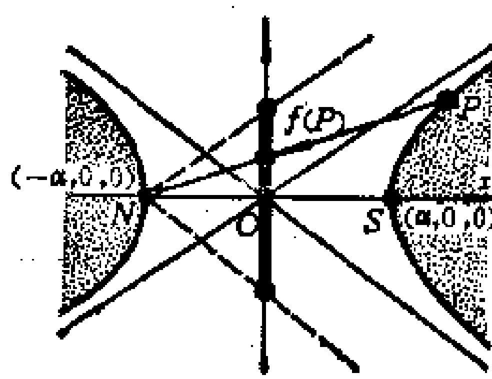


图 28

它为点 P 在球极射影 $f: S_1^2\to R^2$ 下的象. 同样，可利用南极 S 作为射影中心，确定双曲面的左边部分在同一平面 YOZ 上的球极射影. 图 28 表示伪球面与过轴 OX 的平面的截线. 双曲面右边部分的象所覆盖的不是整个 YOZ 平面，而仅是半径为 α 的圆盘 $y^2+z^2<\alpha^2$ 的内部. 双曲面左边部分的象覆盖了圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 的外部. 与通常的球面 S^2 不同，伪球面 S_1^2 在其球极射影下，仅覆盖

着平面 YOZ 的一部分，因为圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 不属于射影的象．北极 N（也象球面情形那样）变为平面 YOZ 的无穷远点．现在设点 P 具有笛卡儿坐标 (x,y,z)（这里 $x>0$），并设 (u^1,u^2) 是点 $f(P)$ 在平面 YOZ 上的笛卡儿坐标，这里映射 f 是球极射影．我们来计算出这些坐标之间的显式关系式．

引理 1 设 $P=(x,y,z)$，$f(P)=(u^1,u^2)$，那么

$$x=\alpha\cdot\frac{|\vec{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2};\quad y=\frac{2\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\vec{u}|^2};\ z=\frac{2\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2},$$

其中 $|\vec{u}|^2=(u^1)^2+(u^2)^2$；$\vec{u}=(u^1,u^2)$．

证明 由图 28 可得

$$\frac{y}{u^1}=\frac{x+\alpha}{\alpha};\ \frac{z}{u^2}=\frac{x+\alpha}{\alpha},\text{即}\quad y=u^1\frac{x+\alpha}{\alpha};\ z=u^2\frac{x+\alpha}{\alpha}.$$

因为 $-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$，所以

$$-\alpha^2=-x^2+((u^1)^2+(u^2)^2)\frac{(x+\alpha)^2}{\alpha^2};$$

从而（因为 $(x-\alpha)>0$）：$x-\alpha=\dfrac{(x+\alpha)}{\alpha^2}\cdot|\vec{u}|^2$，即

$$x=\alpha\cdot\frac{|\vec{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}.$$

引理得证．

引理 2 坐标 (u^1,u^2)（在开圆盘 $(u^1)^2+(u^2)^2<\alpha^2$ 内变化）给出了双曲面右边部分上的正则坐标系，即球极射影给出了坐标的正则变换：$f(x,y,z)\to(u^1,u^2)$．

证明 在伪球面右边部分上点 P 的坐标 x,y,z 之间具有关系 $-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$，所以点 P 的位置当仅给出两个数，例如 y,z 时就可唯一地确定，即由点 P 在平面 YOZ 上的垂直投影的坐标所唯一确定．同时，可以认为伪球面右边部分由方程 $x=\sqrt{\alpha^2+y^2+z^2}$ 所给出．因而球极射影 f 可以理解为坐标变换 $(y,\ z)\to(u^1,u^2)$．

剩下的就是找出这个变换的 Jacobi 矩阵，并验证它的行列式不为 0. 直接计算，得到

$$\frac{\partial y}{\partial u^1}=\frac{2\alpha^2(\alpha^2+(u^1)^2-(u^2)^2)}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2};\qquad \frac{\partial y}{\partial u^2}=\frac{2\alpha^2 2u^1u^2}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u^1}=\frac{2\alpha^2 2u^1u^2}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial u^2}=\frac{2\alpha^2(\alpha^2+(u^2)^2-(u^1)^2)}{(\alpha^2-|\vec{u}|^2)^2}.$$

$$J(f)=2\alpha^2\cdot\frac{\alpha^2+|\vec{u}|^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}=2\alpha x>0.$$

于是变换的 Jacobi 行列式在圆盘$y^2+z^2<\alpha^2$中的所有点上是正的. 引理得证.

在进行下去以前，先回到球面 S^2 的研究上来. 若把球面上通常的点称为“点”，而球面与过中心 O 的平面交线(即赤道)称为“直线”，将在球面上产生怎样的几何？我们只停留在初等的水平上，并看看这些“点”和“直线”的集合适合怎样的几何公理. 很明显，经过不是对径的任何两“点”，有一条且仅有一条“直线”通过；但是，若两“点”是对径的，那么过这两“点”有无穷多条“直线”通过. 此外，对“直线”外一“点”，没有一条通过这“点”而与原来的“直线”不相交的“直线”，就是说，在球面上的这样的几何中，不存在“平行的直线(不相交直线)”.

假如我们希望这个几何尽最大可能接近欧氏几何，那么可对这种方法作一些改进. 例如，把球面 S^2 上的对径点对$(P,-P)$称作新几何的“点”，消除了上面出现的第一个“不足”，于是经过任何一对“点”仅有一条“直线”通过(假定这一对“点”不重合). 这个性质已经类似于欧氏几何的相应的性质. 用初等方法可检验，在我们的几何中，除所谓的“第五公设外”所有古典的欧氏公理都满足，这就是说，仍然是过“直线”外一“点”，没有一条“直线”平行于给定的“直线”，即任何两条“直线”都相交(或相交于一“点”，或两条直线重合). 事实上，任何两个赤道(不重合的)确定一“点”且仅确定

一"点"(P_1—P)．这表明我们获得的几何(有时称为**椭圆几何**)是其内容不亚于欧氏几何的几何，但我们所熟悉的欧氏平面的很多性质被椭圆几何的另外的性质所代替，这些性质从科学史上，在关于我们周围世界的简单的物理概念的基础上形成的古典观点看，也许是更"奇异"的．看来，人们的直接经验更倾向于"欧氏的"概念．

设点 P 是整个球面上的任意点，上面所述把点 P 与 $-P$ 重合的运算，与按照关于 O 点作对称映射而将球面分为等价类的运算是等价的．因为每一对点(P，$-P$)在三维空间(在那里标准地嵌入球面)确定一条且仅确定一条直线，所以可以把椭圆几何的每一条"直线"，即赤道，与垂直于它并经过点 O 的直线相对应．于是椭圆几何的模型可在解析几何教程中周知的二维实射影空间上实现．今后，我们还将再三地返回到这个对象上来．上面叙述的"点"——"直线"相对应的运算变成射影空间的对偶性，它能由每一个在椭圆几何中作出的定理自动地得到某一新的定理，即由前面的定理中把所有的"直线"改为"点"，并把所有的"点"改为"直线"，形式地得到某个新的定理．并且，一般地说得到的某个论断不恒等于原来的论断．

现在我们回到伪欧几何及其在虚半径伪球面上诱导出的几何上来．在球极射影 $f: +S_1^2 \to \{y^2+z^2<\alpha^2\}=D^2$ 下(这里用 $+S_1^2$ 表示双曲面的右面部分)，双曲面的点变为半径为 α 的二维圆盘 D^2 的内点．在双曲面上，我们几何中的"直线"，即它与通过伪球面中心的平面的交线(类似于球面上的赤道)在圆 D^2 上变为怎样的曲线?

引理 3　$+S_1^2$ 与形如 $ax+by+cz=0$ 的平面的每一条交线，在映射 f 下变为与圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 交于直角的圆弧(图 29)．

证明　提醒一下，我们称相交的光滑曲线在交点的速度向量

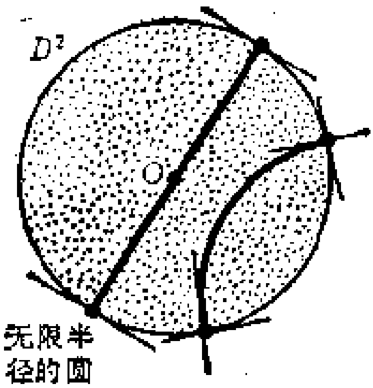


图 29

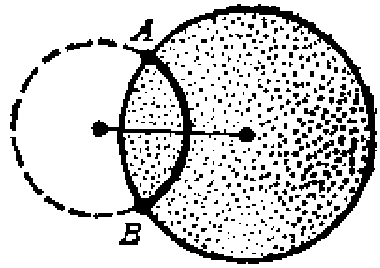


图 30

之间的角为相交曲线之间的角. 为了查明 $+S_1^2$ 上的"直线"变为怎样的曲线，由引理 1，在平面方程 $ax+by+cz=0$ 中代入作为变量 u^1, u^2 的函数的 x, y, z 的显式表示式就足够了. 例如假设 $a\neq 0$，于是方程

$$a\alpha\frac{|\vec{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}+\frac{2b\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}+\frac{2c\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\vec{u}|^2}=0$$

在初等代数变换后，化为形式

$$\left(u^1+\frac{b\alpha}{a}\right)^2+\left(u^2+\frac{c\alpha}{a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{a^2}(b^2+c^2-a^2),$$

就是说，它确定了中心点在

$\left(-\frac{b\alpha}{a}, -\frac{c\alpha}{a}\right)$，半径为 $\frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2+c^2-a^2}=r$ 的圆，此圆与圆 $y^2+z^2=\alpha^2$ 在点 A 和 B 交成直角(图 30)，交角等于 $\frac{\pi}{2}$ 的事实由清清楚楚的关系式 $\alpha^2+r^2=\alpha^2\frac{b^2+c^2}{a^2}$ 得出. 我们指出，$+S_1^2$ 上的"直线"，在映射 f 下不是整个圆周 $\left(u^1+\frac{b\alpha}{a}\right)^2+\left(u^2+\frac{c\alpha}{a}\right)^2=r^2$，而仅是其包含在圆 $y^2+z^2<\alpha^2$ 内的一部分.

于是，R_1^3 中在虚半径伪球面上诱导的几何与发生在欧氏平面 R^2 上半径为 α 的圆内的几何(在适当的坐标变换以后)相符合，若

取这个圆内(不包括边界点)通常的点作为这个几何的"点"，而取与边界圆交成直角的圆弧作为这个几何的"直线"(特别地，圆的所有直径都是"直线"因为它可以看作为半径为无穷大的圆弧). 这种几何称为 Лобачевский 几何，而它在欧氏平面上半径为 α 的圆内的模型称为 Лобачевский 几何的Poincaré 模型. Лобачевский 本人完全是用另外方法得到自己的几何，即没有利用伪欧空间而是直接将"第五公设"设想为有无穷多条直线平行于给定直线而得到的.

在 Poincaré 模型上，容易验证除第五公设外的所有的欧几里得公理(公设)，并确信它们的正确性. 在图 31 中直观地表明，过"直线"外的任意点，可以引无穷多条"直线"平行(即不相交)于给定"直线". 从"平行公理"的观点来看，Лобачевский 几何与椭圆几何是相矛盾的. 我们也同样发现，若参数 α 趋于无穷时，那么在 Poincaré 模型上，Лобачевский 几何对任何有限区域来讲将"趋于"欧氏几何，因为圆弧开始张直并变为欧氏直线. Poincaré模型的边界——圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 称为绝对形，在绝对形上配置的是 Лобачевский 平面的无穷远点. 有时，为简单起见，在研究 Лобачевский 平面时，假设 $\alpha=1$.

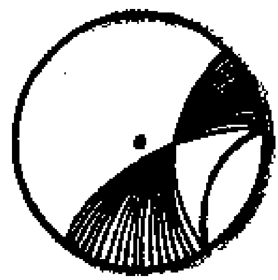


图 31

注 也能考察发生在 R_1^3 中的实半径伪球面上(即在单叶双曲面上)的几何. 问题：证明这种几何与 Лобачевский 几何完全一样.

现在我们转到由外围的不定度量在虚半径伪球面上诱导的黎曼度量的计算问题上来. 做法类似于正常球面，在空间 R_1^3 中引进类似的球面坐标，借助于此坐标写出对我们来讲是合适的伪球面

的方程形式．在平面 YOZ 中引进极坐标(r, φ)，这里 φ 是与 y 轴的夹角．此外再引进参数 θ'——类似于通常球面坐标中相应的参数．现在作变换：$y=\alpha \operatorname{sh}\theta' \cos\varphi$; $z=\alpha \operatorname{sh}\theta' \sin\varphi$; $x=\alpha \operatorname{ch}\theta'$．在这个"伪球面"坐标系中，伪球面的方程写为：$\alpha=\text{const}$．这可由虚半径伪球面的方程直接得出。

我们在 Poincaré 模型上的坐标 u^1, u^2 下，计算伪球面上的黎曼度量形式．利用球极射影的公式并代入到 R_1^3 中弧长微分的平方表示式中，得到(验算！)

$$-(dx(u^1,u^2))^2+(dy(u^1,u^2))^2+(dz(u^1, u^2))^2$$
$$=\frac{4\alpha^2[(du^1)^2+(du^2)^2]}{[\alpha^2-(u^1)^2-(u^2)^2]^2}.$$

因而，Poincaré 模型上，在极坐标下(假设 $\alpha=1$)这个度量写为 $ds^2=4\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$．从这个表示法可看到，所得到的度量是共形的．就是说，它比欧氏度量多一个可变的因子 $\lambda(r)=4(1-r^2)^{-2}$．现在在伪球面坐标下，重新写出这个度量．为此，按照公式 $r=\operatorname{cth}\frac{\chi}{2}, \varphi=\varphi$ 作变换，把(r, φ)变为新的参数(χ, φ)．直接计算得到(验算！)：$ds^2=d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2$．这个度量形式完全类似于球面在坐标$(\theta, \varphi)$下的表示法，而仅仅是通常的三角函数在这里换成为双曲函数。

我们来找出参数 χ 的几何意义．例如，考察平面 XOZ，在此平面上产生诱导的伪欧度量 $ds^2=-dx^2+dz^2$．伪球面与此平面交于双曲线，其参数式在伪球面坐标下为$(\alpha=1)$：$\chi=\operatorname{ch}\theta'$, $z=\operatorname{sh}\theta'$(图 32)．取角 POS 的欧氏值作为参数θ；于是很明显，$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{th}\theta'$．我们来求在伪欧度量中双曲线从 0 到 θ' 线段的长．得到

$$l=\int_0^{\theta'}\sqrt{-\operatorname{sh}^2\theta+\operatorname{ch}^2\theta}\,d\theta=\theta'.$$

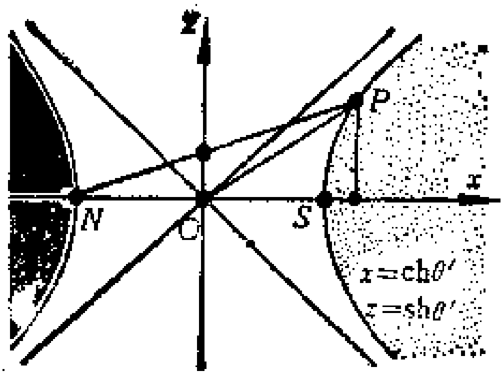


图 32

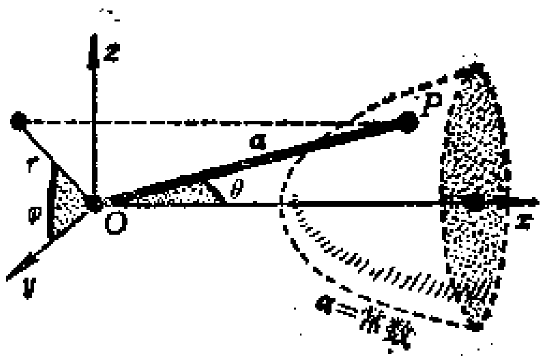


图 33

于是 θ' 与伪球面上从南极 S 到变点 P 的"经线"长相同，就是说，这个参数完全类似于球面上的通常的参数 θ. 其中可以注意的是，我们已使伪欧球面坐标的几何意义明朗化了（参看图 33）. 很明显，伪球面坐标完全类似于球面坐标. 若 $\alpha\neq1$，则"经线"长等于 $\alpha\theta'$.

现在我们考察球极射影（为简单起见，仍然仅考察平面 XOZ，因为在平面 XOZ 绕 OX 轴旋转时，我们的所有的计算都保持不变）. 因为 $z=\frac{2u^2\alpha^2}{\alpha^2-r^2}$，那么得到 $z=\frac{2r}{1-r^2}$（因为在平面 XOZ 上，$u^2=r$）. 因为 $z=\mathrm{sh}\theta'\sin\varphi=\mathrm{sh}\theta'\left(\text{因 }\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $\frac{2r}{1-r^2}=\mathrm{sh}\theta'$，由此 $r=\mathrm{cth}\left(\frac{\theta'}{2}\right)$. 因此就证明了 $\chi=\theta'$. 于是我们得到Poincaré 模型上的黎曼度量 $4\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$.

我们指出，即使外围的度量是伪欧的，因而是不定的，而这个度量却是正定的. 于是，某个曲面（例如虚半径的伪球面）它本身可以带有正定的度量，并且同时嵌入在具有不定度量的空间中. 在伪球面上诱导出正定度量的情况也可以由直观的几何设想中看出. 为简单起见，我们考虑平面 XOZ 对伪球面的截线，并设 $\vec{\xi}$ 是双曲线在点 P 的速度向量. 我们希望证实其伪欧长是实的. 这可由图34

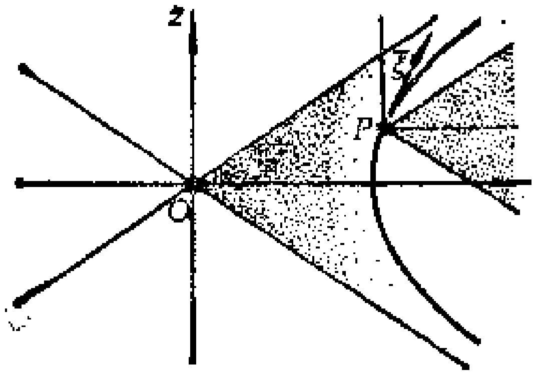


图 34

推得，在图中清楚地看出，向量$\vec{\xi}$位于光锥（顶点在P点）的外面，所以是类空向量.

上面我们所得到的黎曼度量称为 Лобачевский 度量（在 Poincaré 模型上的表示法）. 这个度量可以解释为在引入通常极坐标的欧氏平面的圆上给定的某个新的变量. 前面我们已经知道了给定在单位圆上的黎曼度量的两个其他的例子（为简单起见，认为圆的半径为 1）：这就是欧氏度量和球面度量. 已证明了这些度量是不等价的. 现在我们证明 Лобачевский 度量也不等价于前面两个度量中的任何一个. 为此，我们使用上面用过的方法：求出 Лобачевский 平面上圆周的长并且将它表示为半径的函数（在 Лобачевский 度量中计算）. 为简单起见，我们认为圆周有自己的中心O，并且它的欧氏半径等于a，我们在 Лобачевский 度量中求它的长. 按曲线长的定义，得到$\chi=2\int_0^a\frac{dr}{1-r^2}=\ln\frac{1+a}{1-a}$，即$a=\operatorname{th}\frac{\chi}{2}$. 圆周长$l=2\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\varphi}{1-a^2}=\frac{4\pi a}{1-a^2}=2\pi\operatorname{sh}\chi$. 若$\chi$充分小，那么可近似地认为$l\sim2\pi\chi$，即得到在欧氏度量下圆周长的公式因为也象二维球面一样，我们用（关于坐标变换）不变量的术语，即同样用 Лобачевский 度量下计算的半径大小表示圆周长，那么上面所导出的圆周长的公式关于坐标变换是不变的，因此 Лобачевский 度

量与前面两个度量中任何一个都不等价．在图 35 中，导出了球面度量和伪球面度量的对照表．

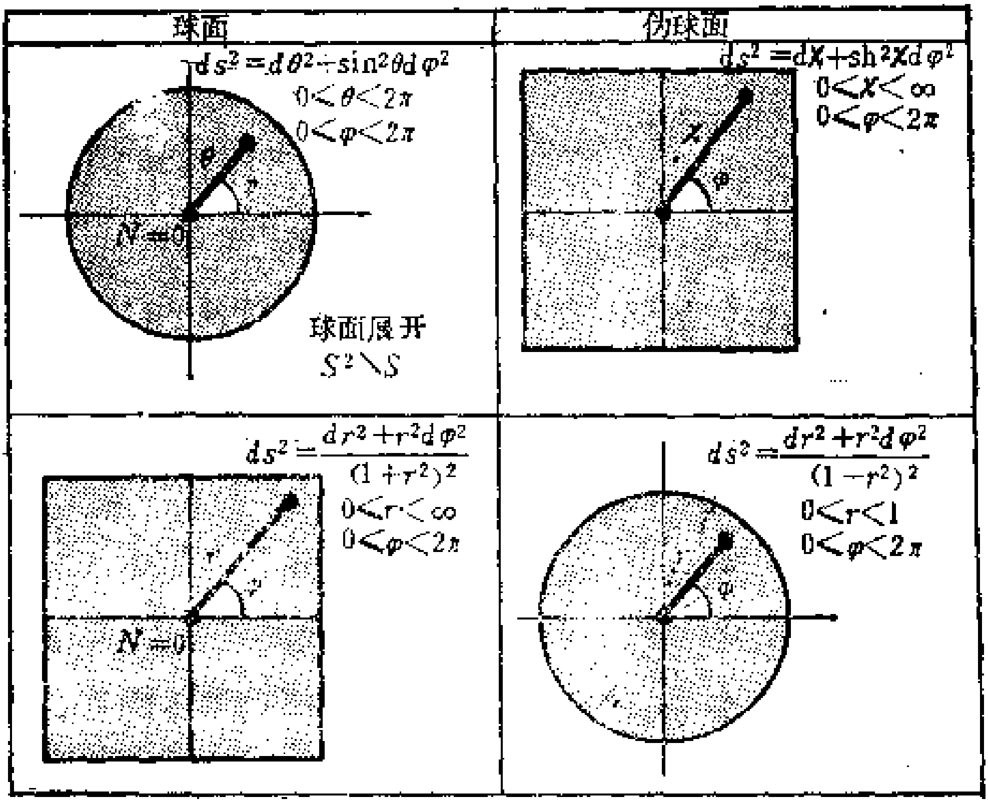


图 35

我们还要指出上面列举的度量的两个有用的表示形式——所谓"复数形式表示法"．为此，考察欧氏平面并在其上引进"复数坐标"，$z=x+iy$．取 $x-iy$ 作为 $\bar{z}$．这里我们将不涉及新"坐标"的几何意义，而将把 $(x,y)\to(z,\bar{z})$ 看作为某种形式的变换．这个变换的Jacobi矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$．Jacobi 行列式 $J=-2i\neq 0$，因此变换可以认为是正则的．因为 $dz=dx+i\,dy$，$d\bar{z}=dx-i\,dy$，所以在这新的坐标下欧氏度量具有形式：$ds^2=dx^2+dy^2=(dx+i\,dy)\cdot(dx-i\,dy)=dz\,d\bar{z}$．于是球面度量具有形式：

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{dz\,d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2},$$

其中 $|z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=r^2$．完全类似地得到 Лобачевский度量

的复数形式：$ds^2=\frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$.

对于 Лобачевский 度量还存在一个在上半平面有效的表示形式．我们再考察一个欧氏平面，并在这个平面上引进新的复数坐标 w，并在这个平面上分划出上半平面(即 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的所有点的集合，这里 $w=u+iv$，$v=\mathrm{Im}(w)$)．考察由公式 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ (a, b, c, d 是复数，且满足 $ad-bc\neq 0$) 给出的映射 $\boldsymbol{R}^2(w)\to\boldsymbol{R}^2(z)$．这样的映射称为线性分式映射．注意，若 $ad-bc=0$，则这个映射把整个平面 $\boldsymbol{R}^2(w)$ 变为一点，因此我们除去这个平凡的情形．

我们的目的是找这样的映射 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$，它把整个的上半平面变到平面 z 上单位圆 $|z|<1$ 的内部．同时，实直线 $\mathrm{Im}(w)=0$ 应当变为边界圆周 $|z|=1$．已知非退化的线性分式映射（即 $ad-bc\neq 0$）由平面 w 上不共线的任何三点 W_1，W_2，W_3 的象唯一地确定．这里我们不证明这个一般的结论，因为我们并不需要这样一般的形式．而用一个具体的例子表明线性分式映射的这个性质，这个例子也正是我们要寻求的半平面到单位圆上的映射．我们找出这样的映射 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$，使 $0\to 1$，$i\to 0$，$1\to i$（循环置换）（参看图 36）．得到下面关于 a,b,c,d 的方程组：

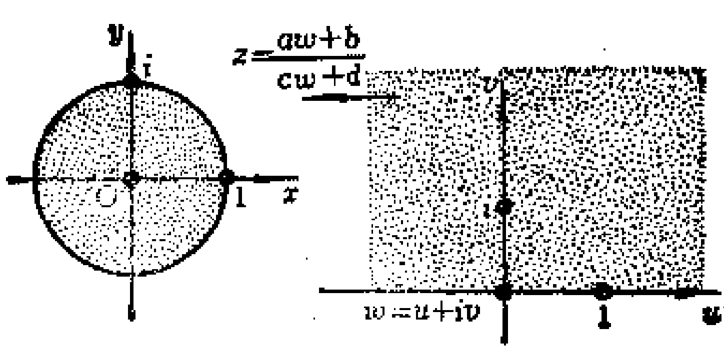


图 36

$$1=\frac{b}{d},$$

$$i=\frac{a+b}{c+d},$$

$$0=\frac{ai+b}{ci+d}.$$

解这个方程组(验算!)得到$z=\frac{1+iw}{1-iw}$. 于是得到一个把上半平面变到单位圆内的线性分式变换(这样的变换有许多!). 我们证明变换 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$确定一个正则坐标变换. 事实上,首先把变换$z=\frac{1+iw}{1-iw}$表示为$-1-\frac{2}{iw-1}\left(=\frac{1+iw}{1-iw}\right)$,我们得到: 为了证明正则变换只要证明变换 $z=\frac{1}{w}$是正则变换时就够了(因为所求的变换是$z=\frac{1}{w}$,平移一个常矢量,旋转和伸长的复合变换). 把映射$z=\frac{1}{w}$表示为实部和虚部,得到:$x=\frac{u}{u^2+v^2}$;$y=\frac{-v}{u^2+v^2}$. Jacobi矩阵为(在相差正因子的精度内):$\begin{pmatrix} v^2-u^2 & 2uv \\ -2uv & v^2-u^2 \end{pmatrix}$. 由此 $J=(u^2+v^2)^2$. 结论已证得.

我们求得$dz=\frac{idw(1-iw)+idw(1+iw)}{(1-iw)^2}=\frac{2idw}{(1-iw)^2}$. 由此$dzd\bar{z}=\frac{4dwd\bar{w}}{|1-iw|^4}$. 在表示式$ds^2=\frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$中进行相应的变换,得到$ds^2=-\frac{dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2}=\frac{1}{4}\frac{du^2+dv^2}{v^2}$. 由此再一次看出,实轴的点(Poincaré 绝对形[①]的象)是Лобачевский平面上的无穷远

① 指 Poincaré 模型的单位圆周——译注.

点(这次在上半平面上制作模型). 事实上，若我们想计算轴 Ov 上从点 i 到点 O(已不属于 Лобачевский 平面)线段的长，那么得到

$$l=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\ln v\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln(0)\to\infty.$$

Лобачевский"直线"(在 Poincaré 模型中)，在到上半平面的映射下变为怎样的曲线？首先解答关于椭圆几何的类似的问题. 提醒一下，我们把球面 S^2 上所有可能的大圆看作为这个几何的"直线". 考察 S^2 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的球极射影. 大圆变为怎样的曲线？

引理 4 大圆在球极射影下或者变为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的圆周，或者变为直线，而且当且仅当大圆经过球面的北极时才变为直线.

证明 首先，我们在笛卡儿坐标下表示出球极射影. 设 x, y, z 是球面上点 P 的坐标，而 x', y' 是它在平面上的象的坐标 (在球极射影以后). 于是由图 37 得到关系式: $x'=\frac{x}{1-z}$; $y'=\frac{y}{1-z}$. 在半径为 1 的球面上圆周的方程表示为: $\{ax+by+cz=d; x^2+y^2+z^2=1\}$. 有

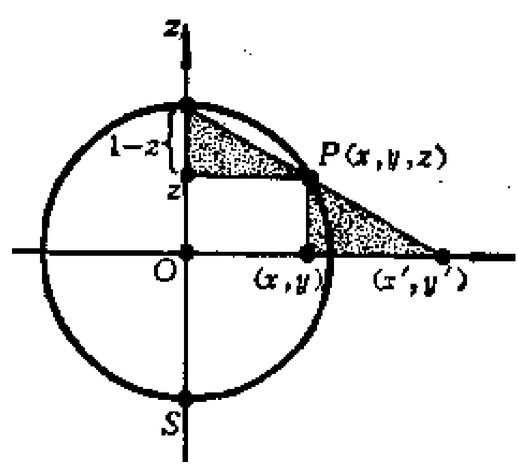


图 37

$$z=\frac{d-ax-by}{c};\ z=\frac{d-ax'-by'}{c-ax'-by'};$$

$$1-z=\frac{c-d}{c-ax'-by'};$$

$$(x')^2(1-z)^2+(y')^2(1-z)^2+z^2=1,$$

因为 $1-z>0$，所以

$$(x')^2+(y')^2=\frac{1+z}{1-z}=1+\frac{2z}{1-z}=1+\frac{2(d-ax'-by')}{c-d},$$

即 $(x')^2-(y')^2+\frac{2a}{c-d}x'+\frac{2b}{c-d}y'=1+\frac{2d}{c-d}$. 由解析几何知道，这个二阶方程在平面上所确定的或是直线，或是圆周，这由参数 a, b, c, d 之间的关系所决定. 引理证毕.

对 Лобачевский 平面也常有类似的结论.

引理 5 非退化的二维平面到自身的线性分式变换 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ (即满足 $ad-bc\neq 0$, a, b, c, d 是复数)，将直线和圆周仍变为直线和圆周，而且直线可能变为圆周，圆周也可能变为直线.

证明 若 $c=0$，那么结论是明显的，因为变换 $z=\frac{a}{d}w+\frac{b}{d}$ 乃是乘以一个复数(旋转并伸长)和沿向量 b/d 的平移. 设 $c\neq 0$，于是 $z=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cw+d)}$，即只要对线性分式变换 $z=\frac{1}{w}$ 证明引理的结论即可. 我们考察平面 z 上任意的圆周，并写出它的方程为: $|z-z_0|^2=\varepsilon^2$，即 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=\varepsilon^2$. 作变换 $z=\frac{1}{w}$，得到(仍将 w 写成 z ——译注) $(1-z_0z)(1-\bar{z}\bar{z}_0)=\varepsilon^2 z\bar{z}$，即 $z\bar{z}(\varepsilon^2-z_0\bar{z}_0)+z_0z+\bar{z}_0\bar{z}-1=0$. 很明显，这方程(依赖于参数 ε, z_0 的选取)确定的或是圆周，或是直线. 引理得证.

推论 1 考察把上半平面变为单位圆的映射 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$. 在此坐标变换下，Poincaré 模型的直线，即垂直于绝对形的圆弧，或变为 w 平面上垂直于实轴 u 的直线($w=u+iv$)，或变为垂直于实轴 u 的半圆周(参看图 38).

证明 我们将认为单位圆嵌入在复变数 z 平面中，而上半平面是嵌入在复变数 w 平面上. 于是可以认为映射 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ 在 w 平面上处处有定义. 由引理 5，这个映射把直线或变为直线，或变

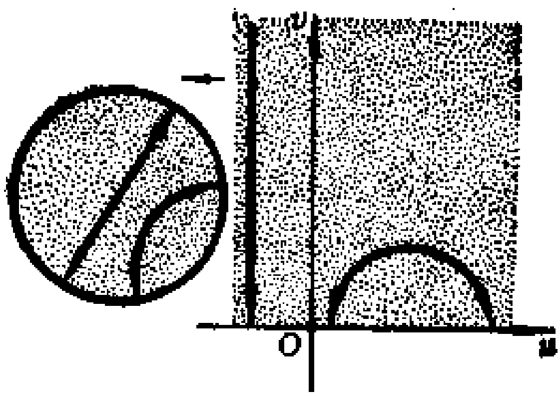


图 38

为圆周(类似地，也把圆周或变为直线，或变为圆周). 因为变换 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ 有逆变换: $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$(提醒一下，这里 $ad-bc\neq 0$)，那么，同样的结论对逆映射 $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$ 也是正确的. 于是，Poincaré 模型的"直线"(若把它们增补为平面 z 上的直线，和增补为平面 z 上的圆周)或变为 w 平面上的直线，或变为 w 平面上的圆周. 剩下的就是要证明它们应当垂直于实轴(在与实轴相交的点上). 这将由下面的引理 6 得到.

引理 6 任何映射 w 平面到 z 平面的非退化的线性分式变换 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$，使相交的光滑曲线间的角保持不变.

证明 在新坐标 $w=u+iv$ 下，以显式计算出欧氏度量 $dzd\bar{z}$，就足以证明. 映射 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$，其中 $ad-bc\neq 0$，定义了正则坐标系，这个事实的验证，可与上面论证变换 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ 的正则性同样进行. 直接计算指出

$$(dz)=\frac{a(dw)(cw+d)-c(dw)(aw+b)}{(cw+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cw+d)^2}(dw)①,$$

① 式中加括号的"(dw)"表示微分——译注.

即$(dz)(d\bar{z})=\frac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^4}(dw)(d\bar{w})$；用实坐标$(x,y)$和$(u,v)$来表示，我们有$(dx)^2+(dy)^2=\frac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^4}((du)^2+(dv)^2)$. 于是我们的映射是共形的，即它为欧氏度量乘以一个正的(变的)因子，并且如前面已证明的，它保持光滑曲线间的交角. 引理证毕.

这样也就完全证明了推论 1. 下面我们详细地来研究映射 $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$的性质. 点 -1 变为无穷，于是 Poincaré 模型上过 1 和 -1 的直径变为在O点垂直于u轴的直线(参看图 39).

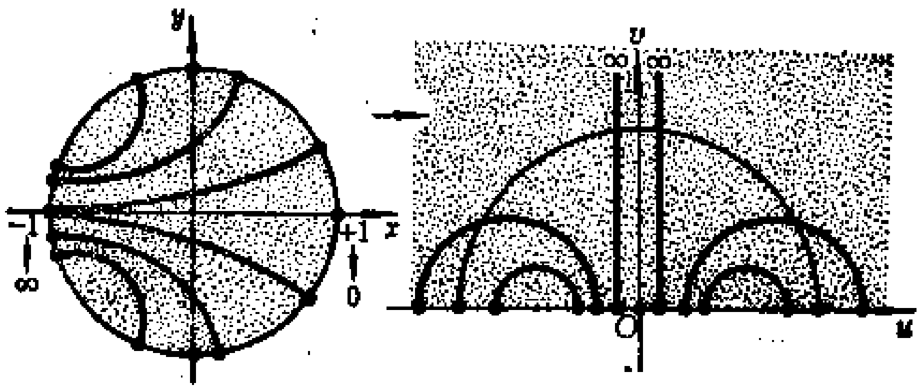


图 39

在映射 $w=\frac{z-1}{i(z+1)}$下，圆周$|z|=1$变为实轴u. 实际上，若$\lambda=\frac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)}$，那么$\bar{\lambda}=\frac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)}=\lambda$，即$\lambda$是实数.

我们研究在上半平面上实现的Лобачевский平面. 设P_1和P_2是上半平面上的两个任意点，那么在 Лобачевский 平面中它们总可以用唯一的“直线”连接. 在图40中表明了这条“直线”的作法. 当两点所在的直线垂直于实轴时，Лобачевский 平面的“直线”与这条直线重合. 我们求出从点P_1到P_2的“直线”段长的显式公式(在Лобачевский 度量下). 首先作简单的不改变其弧长的“直线”变换——沿着轴u作平行移动. 因为 Лобачевский 度量具有形式

$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$，所以它关于这些平行移动是保持不变的（或，有时说关于实位移，即沿着 x 轴位移是"平行不变的"）. 若 P_1 和 P_2 不在垂直于实轴的直线上，特别，可以认为表示过两点 P_1 和 P_2"直

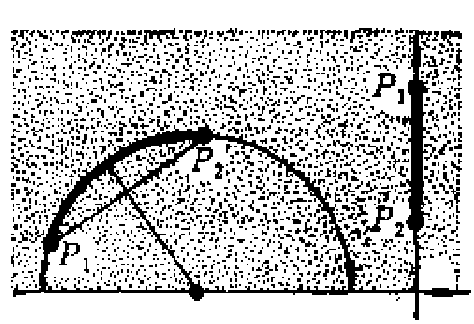


图 40

线"的圆的圆心在点 O. 这"直线"的参数方程为 $r=r_0$，这里 (r,φ) 是极坐标. 设点 P_1 和 P_2 相应地由坐标 (r_0,φ_1) 和 (r_0,φ_2) 给出. 那么从点 P_1 到 P_2 的弧长为：

$$l(P_1,P_2)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{r_0d\varphi}{r_0\sin\varphi}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_{\cos\varphi_1}^{\cos\varphi_2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\cos\varphi_2)(1-\cos\varphi_1)}{(1-\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_1)}=\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}\right).$$

现在假设 P_1 和 P_2 在垂直于实轴的直线上. 于是显然有 $l(P_1,P_2)=\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$，其中 (x,y_1) 和 (x,y_2) 分别为点 P_1 和 P_2 的坐标. 在点 P_1 和 P_2 位于圆周上（中心在实轴上）的场合应该提出一种有用的情况：点 P_1 和 P_2 间的距离在以 O 为中心的相似变换下是不改变的. 我们把圆周的中心与坐标原点看作是一致的.

根据所得到的弧长公式，可以证明在 Лобачевский 平面上，对任何由"直线"段组成的三角形满足三角形不等式，也就是说，若 P_1, P_2 和 P_3 是三角形的顶点，那么 $l(P_1,P_2)+l(P_2,P_3)\geqslant l(P_1,P_3)$.

我们来证明关于 Лобачевский 平面上"直线"的三角形不等式. 为此，仍回到把 Лобачевский 平面表示为双叶双曲面 $+S_1^2$（由方程 $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-1$ 给出）的形式是较方便的. 提醒

一下，Лобачевский 平面上的"直线"是过坐标原点的平面与双叶双曲面的交线. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in +S_1^2$ 是 Лобачевский 平面上的两个向量，P 是由向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 产生的平面. 此时，$\boldsymbol{R}_1^3$ 的数量积诱导出平面 P 上的不定数量积，因为 $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = -1$，所以平面 P 同构于 $\boldsymbol{R}_1^2$，因此在平面 P 上也可以引进线性坐标 (x, y)，使度量具有形式 $-x^2+y^2$，而"直线" Γ 的方程为 $-x^2+y^2=-1$. 因此，在点 $\vec{e}_1=(x_1, y_1)$ 和 $\vec{e}_2=(x_2, y_2)$ 之间的曲线段 Γ 的长可按上面已经引进的公式计算. 为此，我们假设：$x=\mathrm{ch}\chi$, $y=\mathrm{sh}\chi$. 这时，$x_1=\mathrm{ch}\chi_1$, $y_1=\mathrm{sh}\chi_1$, $x_2=\mathrm{ch}\chi_2$, $y_2=\mathrm{sh}\chi_2$，而曲线段的长等于

$$
\begin{aligned}
l_{12} &= |\chi_1-\chi_2| = |\mathrm{arcch}\,x_2-\mathrm{arcch}\,x_1| \\
&= |\mathrm{arcch}(x_1x_2-y_1y_2)| = \mathrm{arcch}(-\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle).
\end{aligned}
$$

若给出三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in +S_1^2$，那么三角不等式具有形式 $l_{12} \leqslant l_{13}+l_{32}$. 在此不等式中，用向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 的数量积的表示来代换：$\mathrm{arcch}(-\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle) \leqslant \mathrm{arcch}(-\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle)+\mathrm{arcch}(-\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle)$. 注意，在 $+S_1^2$ 上三个数量积 $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$, $\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$, $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle$ 都是负的. 在不等式的左边和右边取函数 ch，得到

$$
-\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle \leqslant \langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_1\vec{e}_3\rangle+\sqrt{\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2-1}\sqrt{\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2-1},
$$

或

$$
-\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle-\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle \leqslant \sqrt{\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2-1}\sqrt{\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2-1}.
$$

为证此不等式，只需证明下面的关系式：

$$
\begin{aligned}
&\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle^2+\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2+2\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle \\
&\quad \leqslant \langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2+1-\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2-\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2,
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&-1+2\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle+\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle^2 \\
&\quad +\langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle^2+\langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle^2 \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

因为 $\langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle=\langle\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle=\langle\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle=-1$，所以所求不等式的左边部分构成了由向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的数量积组成的 Gram 行列式：

$$\det\begin{pmatrix}\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle & \langle\vec{e}_1,\vec{e}_3\rangle\\ \langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle & \langle\vec{e}_2,\vec{e}_3\rangle\\ \langle\vec{e}_3,\vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_3,\vec{e}_2\rangle & \langle\vec{e}_3,\vec{e}_3\rangle\end{pmatrix}\leqslant 0.$$

Gram 行列式的符号在基变换下是不变的，而在标准基下它具有形式：

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-1<0.$$

三角形不等式得证.

和球面相类似地进行，由此得出下面结论.

引理 7 对任两点 P,Q，连接这两点的"直线"段实现了该两点间的最短距离.

事实上，我们考察 Лобачевский 平面和它在双叶双曲面的右边部分 $+S_1^2$ 上的实现. 此时，连接点 P,Q 的"直线"是作为双曲面 $+S_1^2$ 与过原点 O(伪球面的中心)的平面的截口而出现的. 我们考察双曲面上连接两点 P,Q 的任何光滑曲线 γ. 用"直线"段组成的折线来逼近曲线 γ. 证明任何这样的折线的长不小于连接 P,Q的"直线"的长就可以了. 我们指出，Лобачевский 平面上任何一对点可以用"直线"段连接. 前面，当对上半平面上任意的一对点可作出过它们的圆周，并且使此圆周(在与实轴的交点上)垂直于实轴时，我们在上半平面的模型中已证明了它，现在，用新的折线来代替我们的折线，而新的折线的长不超过原来折线的长. 为此，考虑原来折线的两段相邻的折线(当这些线段不属于一条"直线"的情况下)，并且连接第一折线段的始点和第二折线段的终点作出新的线段(参看图 41). 因为三角形 ABC 由三条"直线"段组成，所以如上面已证明的，满足三角形不等式，由此新的折线长不超过原来折线长. 继续这个过程，并利用原来的折线的段数是有限的事

实. 经过有限次后，得到仅由一段组成的折线，即连接 P,Q 的某条“直线”段. 但是由上面的推证，证实连接任何一对点的“直线”的存在，并得到这样的“直线”是唯一的. 于是，我们简化折线的过程在折线与连接 P,Q 的“直线”段一致时停止. 引理得证.

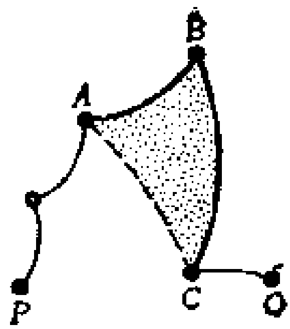


图 41

这样，我们得到了为什么双曲面的平面截口在 Лобачевский 几何中起着直线作用的某个依据. 证明了它们恰好也实现了 Лобачевский 平面上两点之间的最短距离. 我们习惯在欧氏平面上按直线运动恰好也就是按照实现了两点最短距离的轨线运动. 因为在 Лобачевский 几何中(也象球面几何一样)，“直线运动”的概念不是自然地和简单地用常数分量的向量(指出唯一的运动方向)的语言叙述的，所以很自然地把按始点到终点之间的最短距离得以实现的某条光滑曲线进行的运动称为“直线运动”. 无论在球面上，还是在 Лобачевский 平面上，我们都发现了这样的曲线类. 在两种情况下，这类曲线都由作为相应的几何模型的二维曲面(球面和伪球面)的平面截口组成. 今后，当我们熟识了最简单的变分学基础时，我们将证明这类曲线也可以用同样的性质从所有光滑曲线集合中分出来，沿这些“直线”很自然地可定义平行移动的概念，这是欧氏空间中通常的平行移动的推广(这样的曲线称为测地线).

§4 习 题

1. 证明伪球面上的三角形(由“直线”段组成)的内角和小于 2π.
2. 用伪球面上三角形(由“直线“段组成)的面积表示其内角和.

第二章　一般拓扑

拓扑学是数学的一个分支，它研究几何对象在"形变"或类似于形变的变换下不变的性质．在数学分析中，遇到按其性质和研究方法来说是相同的许多概念．例如，收敛和极限的概念在数学分析中常以下列形式出现：(1)序列的极限，(2)一元函数的各种类型的极限，(3)多元函数的极限，(4)向量值函数的极限，(5)积分和的收敛性．所有这些极限和收敛的概念，是以共同的研究手段为基础的，直观上我们把这些方法理解为某个集合中的点的相互接近性．不同类型的连续性概念是把收敛性概念与它们紧密地联系起来的，另一个极重要的例子．一般拓扑恰恰是研究几何的空间和它们的变换的最一般的性质的，在这里的变换正是与收敛性和连续性相联系的．

§1　度量空间和拓扑空间的定义及最简单性质

1．度量空间

作为拓扑学的基础的概念是任意集合中元素的"邻近"概念．用元素间距离的数值来衡量邻近的程度是最方便的．

我们考察由具任意性质元素组成的任何集合 X．一对元素 x，$y\in X$ 的非负数值函数 $\rho(x, y)$，满足下列条件时就称为集合 X 的**度量**：

1° 当且仅当 $x=y$ 时，$\rho(x,y)=0$；

2° $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

3° 对任何三个元素 $x,y,z\in X$，总成立

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

性质 1°,2°,3° 分别称为恒等公理,对称公理和三角形公理.

集合X与定义在X上的某个度量ρ一起称为**度量空间**,集合X的元素称为**点**. 对一对点$x,y\in X$上的度量值$\rho(x,y)$称为点x和y之间的距离. 度量空间应该表示为配对的形式(X,ρ). 但为了简便起见,若不引起误解的话,常简单地用X来表示度量空间.

度量空间的最简单的例子是实数集合R^1,其度量由等式$\rho(x,y)=|x-y|$给出. 函数ρ具有度量的所有性质,并把R^1变为度量空间.

如果X是具有度量ρ的度量空间,而Y是X的某个子集,那么借助于同一个度量ρ,集合Y也成为度量空间. 度量空间(Y,ρ)称为度量空间X的**子空间**. 假设Y是度量空间X的任何子空间. 考察所有的数$\rho(x,y)$的上确界,其中x,y跑遍集合Y的点. 若这个上确界是有限数$d=\sup\limits_{x,y\in Y}\{\rho(x,y)\}$,那么集合$Y$称为是**有界的**,而数$d$则称为集合$Y$的**直径**.

对$x\in X$,满足$\rho(x,y)<\varepsilon$的所有点$y\in X$的集合$O_\varepsilon(x)$称为**中心在$x\in X$,半径为ε的球邻域**.

当x跑遍集合Y_1,而y跑遍集合Y_2时,数$\rho(Y_1,Y_2)=\inf\rho(x,y)$称为**两个集合$Y_1,Y_2\subset X$之间的距离**. 若$Y_1$和$Y_2$具有公共点,那么$\rho(Y_1,Y_2)=0$. 但是,也可能有这样的例子,它们是不相交的集合,而它们之间的距离为零.

对集合Y,满足$\rho(x,Y)<\varepsilon$的所有点$x\in X$的集合$O_\varepsilon(Y)$称为**半径为ε的集合Y的球邻域**.

使$\rho(x,Y)=0$的每一个点x都称为集合Y的**接触点**. 特别,集合Y的每一点x是它的接触点. 反过来的结论一般不成立. 例如,区间$(a,b)\subset R^1$具有接触点a,b,而这两点不属于区间(a,b).

集合Y的所有接触点的集合称为集合Y的**闭包**,集合Y的闭

包用 $\bar{Y}$ 表示.

因此,$Y\subset\bar{Y}$,但反过来一般不成立. 在上面考察的区间(a,b)例子中,它的闭包是闭区间$[a,b]$.

度量空间的集合 Y,若它的闭包$\bar{Y}$与Y相同,$\bar{Y}=Y$,则称Y是**闭集**.

集合Y的一点x,若它的某个球邻域包含在Y内: $O_\varepsilon(x)\subset Y$,则称$x$是$Y$的**内点**. 集合$Y$的所有的内点的集合称为**集合$Y$的内部**,并表示为$\mathrm{Int}Y$. 若集合$Y$与它自己的内部$\mathrm{Int}Y$相同,则称集合$Y$为**开集**.

定理 1 设X是度量空间. 集合$Y\subset X$是闭集的充要条件为Y的补(余集)$X\backslash Y$是开集.

证明 假设Y是闭集,$\bar{Y}=Y$并且$x\in X\backslash Y$. 这就是说,点x不是集合Y的接触点,即$\rho(x,Y)=\varepsilon>0$. 我们证明$O_\varepsilon(x)\subset X\backslash Y$. 实际上,若$y\in O_\varepsilon(x)$,则$\rho(x,y)<\varepsilon$. 如果$y\in Y$,那么$\rho(x,y)\geqslant\rho(x,Y)$,即$\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$,得到矛盾. 因此,集合$X\backslash Y$是开集.

反过来,假设$X\backslash Y$是开集. 若$x\in X\backslash Y$,那么存在属于$X\backslash Y$的球邻域$O_\varepsilon(x)$. 这就是说,对$y\in Y$,$\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$成立,即有$\rho(x,Y)\geqslant\varepsilon$. 于是点$x$不是集合$Y$的接触点. 因此,若$x\in\bar{Y}$,则$x\bar{\in}(X\backslash Y)$,即$x\in Y$. 这就是说$\bar{Y}\subset Y$,即$\bar{Y}=Y$. 从而集合$Y$是闭集.

定理 2 设X是度量空间. 则:任何一族开集的并是开集;有限多个开集的交是开集. 用对偶的方法得到:任何一族闭集的交与有限个闭集的并是闭集.

证明 假设$Y_\alpha\subset X$是一族开集,我们证明并$Y=\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha$是开集. 设$x\in Y$,则对某个指标$\alpha$,$x\in Y_\alpha$并且因为$Y_\alpha$是开集,那么有球邻域$O_\varepsilon(x)$整个含在$Y_\alpha$中,$O_\varepsilon(x)\subset Y_\alpha$. 所以$O_\varepsilon(x)\subset Y_\alpha\subset\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha$

$=Y$，即 Y 是开集．现在假设指标 α 取有限多个值，我们证明交 $Y'=\bigcap_\alpha Y_\alpha$ 是开集．设 $x\in Y'$，则对每一个指标值 α，$x\in Y_\alpha$ 成立．因为 Y_α 是开集，所以有某个球邻域 $O_{\varepsilon_\alpha}(x)$ 含于 Y_α 中．假定 $\varepsilon=\min\varepsilon_\alpha>0$（这里利用指标 α 集合的有限性）．那么对所有的指标 α，$O_\varepsilon(x)\subset O_{\varepsilon_\alpha}(x)\subset Y_\alpha$ 成立，即 $O_\varepsilon(x)\subset\bigcap_\alpha Y_\alpha=Y$．于是，$Y$ 是开集．

对闭集的对偶的结论，可由定理 1 和并、交、补(余集)运算的关系

$$\bigcap_\alpha(X\setminus Y_\alpha)=X\setminus\bigcup_\alpha Y_\alpha,\quad \bigcup_\alpha(X\setminus Y_\alpha)=X\setminus\bigcap_\alpha Y_\alpha$$

得到．

在前面的论证中，我们还未用到通常称为三角形不等式的度量性质 3°．在今后的许多关于度量空间的论证中，仅用到在定理 1 和定理 2 中所叙述的性质．所以，可以扩大空间的种类，对于这些空间，只要凡涉及到开集，闭集，内点和接触点的论述都有意义．即．但在引入这个一般概念以前，我们还要证明已经建立在三角形不等式基础上的度量空间的几个有用的结论．

定理 3　设 X 是度量空间．那么：

1°　球邻域 $O_\varepsilon(x)$ 是开集；

2°　任何集 Y 的内部 $\mathrm{Int}Y$ 是开集；

3°　任何集 Y 的闭包 $\bar{Y}$ 是闭集．

证明　设 $y\in O_\varepsilon(x)$，则 $\rho(x,y)=\delta<\varepsilon$．我们证明存在这样的数 $\varepsilon'>0$，使 $O_{\varepsilon'}(y)\subset O_\varepsilon(x)$ 成立．取 ε'，使 $\delta+\varepsilon'<\varepsilon$．那么，若 $z\in O_{\varepsilon'}(y)$，则 $\rho(z,y)<\varepsilon'$．于是，$\rho(z,x)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)<\delta+\varepsilon'<\varepsilon$，即 $z\in O_\varepsilon(x)$．这也就是说，$O_{\varepsilon'}(y)\subset O_\varepsilon(x)$．于是，$O_\varepsilon(x)$ 是开集．

现在证明 $\mathrm{Int}Y$ 是开集. 注意，若 $Y_1\subset Y_2$，则 $\mathrm{Int}Y_1\subset\mathrm{Int}Y_2$. 所以若 $x\in\mathrm{Int}Y$，则 $O_\varepsilon(x)\subset Y$，而这就是说，由于结论 1°，$O_\varepsilon(x)=\mathrm{Int}O_\varepsilon(x)\subset\mathrm{Int}Y$. 那么，根据定义，集合 $\mathrm{Int}Y$ 是开集.

最后，我们证明 $\overline{Y}$ 是闭集. 根据定义，当且仅当 $x\in\mathrm{Int}(X\backslash Y)$ 时，点 x 不属于 $\overline{Y}$，即 $X\backslash\overline{Y}=\mathrm{Int}(X\backslash Y)$. 按照定理 1，若 $\mathrm{Int}(X\backslash Y)$ 是开集，则 $\overline{Y}$ 是闭集. 定理 3 证明完毕.

2. 拓扑空间

集合 X 中，若引入一族称为**开集**的子集，而且满足下面的条件：

1° 集合 X 与空集都是开集；

2° 任何一族开集的并与有限个开集的交都是开集，我们就说在集合 X 上给出了**拓扑**.

集合 X 和在它上面给出的拓扑称为**拓扑空间**，集合 X 的元素称为空间 X 的**点**. 开集的补(余集)称为**闭集**. 显然，在任何拓扑空间 X 中，成立闭集的对偶性质：

(1°)′ 集合 X 与空集是闭集.

(2°)′ 任何一族闭集的交与有限个闭集的并都是闭集.

所以，为了在集合 X 上给出拓扑，可以给出一族满足条件(1°)′和(2°)′的称为是闭集的集合，以代替一族开集.

前面一段的定理 2 表明，度量空间 X 上的一族开集给出了 X 上某个拓扑，即把 X 变为拓扑空间.

在拓扑空间中，再现了度量空间的很多重要的概念. 我们称任何含有点 x 的开集为拓扑空间 X 中**点 x 的邻域**. 类似地，包含子集 Y 的开集称为**集合 Y 的邻域**. 若点 x 的每一个邻域与集合 $Y\subset X$ 都有非空的交，则称 x 是集合 Y 的**接触点**. 集合 Y 的所有接触点的集合称为集合 Y 的**闭包**，并用 $\overline{Y}$ 表示. 点 $x\in Y$ 与它的某

个邻域都在Y中，则称x是集合Y的**内点**．集合Y的所有内点的集合称为集合Y的**内部**，并用$\mathrm{Int}Y$表示．

定理4　集合$Y\subset X$是闭集(即为开集的补(余集))的充要条件是$Y=\overline{Y}$．

证明　设Y是闭集，即$X\backslash Y$是开集．那么，集合$X\backslash Y$是其任何点的邻域，即集合$X\backslash Y$的点不是集合Y的接触点．所以$\overline{Y}\subset Y$，即$Y=\overline{Y}$．反过来，设$Y=\overline{Y}$．那么，若$x\overline{\in}Y$，则x不是集合Y的接触点，就是说它的某个邻域U_x与Y不相交，即$U_x\subset X\backslash Y$．这样一来，集合$X\backslash Y$表示为开集U_x的并，也就是说它本身是开集．定理4证完．

定理5　拓扑空间X的任何集Y的闭包$\overline{Y}$是闭集．

证明　按照前面的定理，必须证明等式$\overline{\overline{Y}}=\overline{Y}$．包含关系$\overline{Y}\subset\overline{\overline{Y}}$是明显的，因此剩下的是核对相反的包含关系$\overline{\overline{Y}}\subset\overline{Y}$．于是，假设$x\in\overline{\overline{Y}}$．这就是说点$x$的任何邻域$U$与$\overline{Y}$有非空的交，譬如说$y\in U\cap\overline{Y}$，那么此时集合$U$是$y$的邻域．因为$y\in\overline{Y}$，那就是说，集合$U$与集合$Y$有非空的交．于是点$x$是集合$Y$的接触点，即$x\in\overline{Y}$．这样，我们就证明了$\overline{\overline{Y}}\subset\overline{Y}$．定理5证完．

例1　考察由一个元素x组成的集合X．在X上可以引入唯一的拓扑结构，它的开集是集合X和空集．

例2　考察由两个元素$x\neq y$组成的集合X．在这个集合上甚至能引进几个不同的拓扑结构．第一个拓扑结构由所有的子集的集合$\{\varnothing,\{x\},\{y\},X\}$作为开集给出．第二个拓扑结构由开集族$\{\varnothing,X\}$给出．最后，还可以给出第三个拓扑结构，应该取$\{\varnothing,\{x\},X\}$作为它的开集族．这是在同一个集合$X$上的所有不同的拓扑结构，它给出了三个不同的拓扑空间．

例3　设X是任何集合．在X上引入拓扑结构，取它的任何子集作为开集．那么任何单个点构成的子集都是开集，也就是说，

作为它自己的点的并的任一子集也是开集．这样的拓扑称为**离散拓扑**．

设 X 是拓扑空间，$Y\subset X$ 是它的子集．那么，在 Y 上也能作出拓扑结构，方法是取所有的集合 $Y\cap U$ 为开集，其中 U 是 X 中的开集．此时，拓扑空间 Y 称为拓扑空间 X 的**子空间**，而 Y 中的拓扑结构称为**诱导拓扑**．若 X 是度量空间，而 Y 是它的子空间，那么 Y 的拓扑结构的给出与下面的做法次序无关：度量先在 Y 上作限制，再转化为拓扑，或先转化为拓扑，再诱导出 Y 上的拓扑．

设 Y 是拓扑空间 X 中的子集．若 $\overline{Y}=X$，则称 Y 为**稠密集**（**处处稠密**）．

定理 6　若 Y_1，Y_2 是 X 的两个稠密的开集，那么它们的交 $Y=Y_1\cap Y_2$ 是开集并且在 X 中是稠密的．

证明　设 $x\in X$ 是任意点，U 是它的邻域．因为集合 Y_1 是稠密的，所以 $U\cap Y_1\neq\varnothing$，即存在点 $y\in U\cap Y_1$．因为 $U\cap Y_1$ 是开集，而 Y_2 是稠密集，所以 $U\cap Y_1\cap Y_2\neq\varnothing$，即 $U\cap Y\neq\varnothing$，这就是说 Y 是 X 中的稠密集．定理 6 证完．

3．连续映射

拓扑空间的概念可以如此成功地建立起来，使得连续映射的定义可从数学分析中逐字逐句地移过来．

Cauchy 的定义：$f:X\to Y$ 为拓扑空间的映射，若对点 $f(x_0)\in Y$ 的任何邻域 $V(f(x_0))$，存在点 $x_0\in X$ 的这样的邻域 $U(x_0)$ 使 $f(U(x_0))\subset V(f(x_0))$，则称 f **在点 $x_0\in X$ 连续**．若映射 f 在空间 X 的每一点都连续，则称 f 为**连续映射**．

定理 7　映射 $f:X\to Y$ 连续的充分必要条件是满足下面两个等价条件之一：

1° 任何开集的原象是开集，

2° 任何闭集的原象是闭集.

证明 因为对原象来说，关系式 $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$ 成立，所以条件 1° 和 2° 等价. 设 f 是连续映射，$V\subset Y$ 是开集. 我们证明它的原象 $f^{-1}(V)$ 是开集. 假定 $x\in f^{-1}(V)$，则 $f(x)\in V$，即 V 是点 $f(x)$ 的邻域. 于是按照连续映射 f 的定义，存在这样的点 x 的邻域 U，使 $f(U)\subset V$，即 $U\subset f^{-1}(V)$，这就是说集合 $f^{-1}(V)$ 是开集. 反过来，假设条件 1° 是满足的. 若 $V\ni f(x_0)$ 是点 $f(x_0)$ 的邻域，则 $U=f^{-1}(V)\ni x_0$ 是点 x_0 的邻域，而且 $f(U)=f(f^{-1}(V))=V\subset V$. 于是 f 是连续映射. 定理 7 证完.

定理 7 的条件 1° 和 2° 在验证拓扑空间的连续映射时是方便的. 例如下面的定理在以后是很有用的。

定理 8 设拓扑空间 X 表示为自己的两个闭子集的并 $X=F_1\cup F_2$，$f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 映射 f 连续的充要条件是 f 在子集 F_1 和 F_2 上的限制 $f|F_1:F_1\to Y$，$f|F_2:F_2\to Y$ 是连续的.

证明 设 f 是连续映射，我们证明，例如，$f|F_1$ 是连续映射. 对映射 $f|F_1$，原象由公式 $(f|F_1)^{-1}(A)=F_1\cap f^{-1}(A)$ 算出. 所以，若 A 是闭集，则 $f^{-1}(A)$ 和 $F_1\cap f^{-1}(A)$ 也是闭集. 反过来，设 $f|F_1$ 和 $f|F_2$ 是连续映射，我们证明 f 是连续的. 设 $A=\bar{A}\subset Y$. 那么

$$\begin{aligned}f^{-1}(A)&=f^{-1}(A)\cap X=f^{-1}(A)\cap(F_1\cup F_2)\\&=(f^{-1}(A)\cap F_1)\cup(f^{-1}(A)\cap F_2)\\&=(f|F_1)^{-1}(A)\cup(f|F_2)^{-1}(A).\end{aligned}$$

因为集合 $(f|F_1)^{-1}(A)$ 在子空间 F_1 中是闭集，而 $F_1=\bar{F}_1$，所以 $(f|F_1)^{-1}(A)$ 在 X 中是闭的. 类似地，集合 $(f|F_2)^{-1}(A)$ 在 X 中也是闭的. 于是 $f^{-1}(A)$ 在 X 中是闭的. 定理 8 证完.

我们考察拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射 $f:X\to Y$. 若 f 是双方单值的，而逆映射 f^{-1} 也是连续的，则映射 f 称为同胚.

同时，拓扑空间X和Y称为**同胚的拓扑空间**. 在同胚下，不仅建立了拓扑空间X和Y的点之间的双方单值的对应，而且建立了拓扑结构本身之间一对一的对应. 就是说，建立了开集族之间的对应和建立了闭集族之间的对应. 如果拓扑空间的某个性质对同胚的拓扑空间来说是相同的. 则称此性质是**拓扑不变的**. 于是，在研究拓扑不变性质时，我们对同胚的空间可以不加区分.

例4 映射$f:X\to Y$是连续的这个性质是拓扑不变性质. 事实上，若$\varphi:X'\to X$，$\psi:Y\to Y'$是同胚，那么复合$X'\xrightarrow{\psi f\varphi}Y'$是连续映射. 一般而言，两个连续映射的复合是连续映射.

例5 连续函数，即拓扑空间X到实数空间$\boldsymbol{R}^1$的连续映射，是连续映射的重要的特殊情形. f是连续函数的条件可以用如下的方式叙述：对任何点$x_0\in X$和任何$\varepsilon>0$，存在点x_0的邻域U，使得当$y\in U$时，不等式$|f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$成立. 对拓扑空间上的函数，可以定义连续函数序列的均匀极限. 也象一元实变函数的情形那样，下面的结论是正确的：

若$f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$，并且在拓扑空间$X$上的连续函数序列$\{f_n\}$收敛于$f$是均匀的，则函数$f$也是连续的.

事实上，设$x_0\in X$，$\varepsilon>0$. 取这样的指数n，使$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3$对任何点$x\in X$成立(均匀收敛). 其次，因为$f_n$是连续函数，那么存在点$x_0$的邻域$U$，使得当$x\in U$时，满足不等式：$|f_n(x_0)-f_n(x)|<\varepsilon/3$. 那么$|f(x_0)-f(x)|<|f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<3\cdot\varepsilon/3=\varepsilon$.

例6 设$f:X\to Y$是度量空间的连续映射，ρ_1,ρ_2分别为空间X,Y上的度量. 那么映射f连续性的条件可用下面方式叙述：对任何$x_0\in X$和$\varepsilon>0$，存在这样的$\delta>0$，从不等式$\rho_1(x,x_0)<\delta$可得到不等式$\rho_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

把数列收敛性概念推广到度量空间也是有效的. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_0,$

$x_n)=0$，则说点列$\{x_n\}$收敛于点 x_0，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 空间和映射的许多性质可用度量空间的收敛序列的语言来叙述．举例说，若对任何收敛点列$\{x_n\}\subset Y$，其极限 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 也属于集合 Y，则集合 $Y\subset X$ 是闭集．还有，度量空间映射 $f:X\to Y$ 的连续性条件按 Heine 叙述为：若由等式 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可得到等式 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ 时，则映射 f 在点 x_0 连续．

例 7 考察两个拓扑空间X和Y，构造新的拓扑空间 $X\times Y$. 集合$X\times Y$是所有形为(x,y)的配对的集合，其中$x\in X$，$y\in Y$，并称 $X\times Y$ 为集合X和Y的**笛卡儿乘积**．现在来定义 $X\times Y$ 中的拓扑．若$U\subset X\times Y$ 表示为并 $U=\bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha\times W_\alpha)$，其中 $V_\alpha\subset X$，$W_\alpha\subset Y$ 是开集，则称集合U为开集．验证开集的性质是容易的．集合 $X\times Y$ 和上面所定义的拓扑结构一起称为**拓扑空间 X 和 Y 的笛卡儿乘积**．同时，拓扑空间X和Y称为笛卡儿乘积 $X\times Y$ 的因子．笛卡儿乘积有下列的性质：1° 空间 $X\times Y$ 和 $Y\times X$ 是同胚的；2° 空间 $(X\times Y)\times Z$ 和 $X\times(Y\times Z)$是同胚的．在第一个情况下，应该取映射 $\varphi:X\times Y\to Y\times X$，$\varphi(x,y)=(y,x)$ 作为同胚．那么，若 $U=\bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha\times W_\alpha)$是空间 $X\times Y$ 的开集，则 $\varphi(U)=\bigcup\limits_{\alpha}(W_\alpha\times V_\alpha)$ 是空间$Y\times X$ 的开集．在第二个情况下，应该取$\varphi:(X\times Y)\times Z\to X\times(Y\times Z)$，$\varphi((x,y),z)=(x,(y,z))$ 作为同胚．笛卡儿乘积 $X\times Y$ 在一个因子上的投影，比方说在X上的投影$f:X\times Y\to X$，$f(x,y)=x$，是连续映射．实际上，开集 $U\subset X$ 的原象具有形式 $f^{-1}(U)=U\times Y$，即 $f^{-1}(U)$是开集．

例 8 设X和Y是度量空间，则笛卡儿乘积 $X\times Y$ 容有与笛卡儿乘积的拓扑相一致的度量．设 ρ_1，ρ_2 分别是空间X和Y的度量．在笛卡儿乘积 $X\times Y$ 上定义度量 ρ，

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}. \tag{1}$$

我们来验证度量的性质 1°,2°,3°. 若 $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0$,则 $\rho_1(x_1,x_2)=\rho_2(y_1,y_2)=0$,即 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$,由此得到: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. 反过来,若 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, 则 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, 这意味着 $\rho_1(x_1,x_2)=\rho_2(y_1,y_2)=0$. 于是,$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{0,0\}=0$. 性质 1° 得证. 其次,

$$\begin{aligned}\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))&=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}\\&=\max\{\rho_1(x_2,x_1),\rho_2(y_2,y_1)\}=\rho((x_2,y_2),(x_1,y_1)),\end{aligned}$$

于是,性质 2° 也得证. 最后验证三角形不等式 3°:

$$\begin{aligned}\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))&=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}\\&\leqslant\max\{\rho_1(x_1,x_3)+\rho_1(x_3,x_2),\rho_2(y_1,y_3)+\rho_2(y_3,y_2)\}\\&\leqslant\max\{\rho_1(x_1,x_3),\rho_2(y_1,y_3)\}+\max\{\rho_1(x_3,x_2),\rho_2(y_3,y_2)\}\\&=\rho((x_1,y_1),(x_3,y_3))+\rho((x_3,y_3),(x_2,y_2)).\end{aligned}$$

于是公式(1) 定义了笛卡儿乘积 $X\times Y$ 的某个度量. 我们证明,由度量 ρ 确定的拓扑结构与笛卡儿乘积的拓扑结构是一致的. 考察中心在点 (x_0,y_0),半径为 ε 的球邻域:

$$\begin{aligned}O_\varepsilon(x_0,y_0)&=\{(x,y):\rho((x,y),(x_0,y_0))<\varepsilon\}\\&=\{(x,y):\rho_1(x,x_0)<\varepsilon,\rho_2(y,y_0)<\varepsilon\}\\&=O_\varepsilon(x_0)\times O_\varepsilon(y_0).\end{aligned}$$

于是任一个在度量 ρ 意义下的开集是笛卡儿乘积拓扑的开集,并且反过来也成立.

还存在在笛卡儿乘积上给出度量的另外的方法. 常采用的方法在于: 将笛卡儿乘积的因子 X 与 Y 与平面坐标轴进行类比. 度量按照下面公式给出:

$$\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1,x_2)^2+\rho_2(y_1,y_2)^2}. \tag{2}$$

我们将性质 1°,2°,3° 的验证留给读者去做. 为了证明度量(2)给出的拓扑与度量(1)给出的拓扑一致,只要找到两个常数 $C_1>0$ 和

$C_2>0$，使

$$C_1\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))\leqslant\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$
$$\leqslant C_2\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \tag{3}$$

成立就可以了．事实上，若 O_ε 表示在度量 ρ 下的球邻域，O'_ε 表示在度量 ρ' 下的球邻域，那么在每一点能实现包含关系．

$$O_\varepsilon((x_0,y_0))\subset O'_{\varepsilon'}((x_0,y_0))\subset O_{\varepsilon''}((x_0,y_0)) \tag{4}$$

就够了，其中 ε,ε' 是对任意的 $\varepsilon''>0$ 而选取的．由不等式(3)得到包含关系(4)在 $\varepsilon'=C_2\varepsilon''$，$\varepsilon=\varepsilon'/C_1$ 时成立．于是必须证明不等式(3)．我们有

$$\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1,x_2)^2+\rho_2(y_1,y_2)^2}$$
$$\leqslant\sqrt{2}\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}$$
$$=\sqrt{2}\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2));$$
$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}$$
$$\leqslant\sqrt{\rho_1(x_1,x_2)^2+\rho_2(y_1,y_2)^2}=\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2)).$$

从而不等式(3)在 $C_1=1$，$C_2=\sqrt{2}$ 时成立．于是，我们证明了在笛卡儿乘积 $X\times Y$ 中由公式(1)和(2)给出的两个度量产生同一个笛卡儿乘积拓扑结构．

§1 习 题

1．举出有限集合上的度量的例子，要求此度量不是从它在欧氏空间的任何嵌入中诱导出来的．

2．证明：直线上的有限集是闭集．

3．证明：$\rho(x,Y)=\rho(x,\bar{Y})$．

4．证明：函数 $f(x)=\rho(x,Y)$ 对任何子集 Y 是连续的．

5．证明：有限集合上的任何度量在它上面诱导出离散拓扑．

6．证明：区间，半区间，实直线上的线段两两不同胚．

7．证明：在度量空间 X 的笛卡儿平方 $X\times X$ 上，度量 $\rho(x,y)$ 是连续函数．

8. 证明：集合 X 表示为两个闭集之差的充要条件为 $(\overline{X}\setminus X)$ 是闭集.

9. 证明：在连续映射下，稠密子集的象在象集中是稠密的.

§2 连通性　分离公理

在所有的拓扑空间中，可分出由某些拓扑不变性质所定义的更窄的一些空间类. 例如，在前面一节的例 3 中，已经分出一类离散拓扑空间. 对这类空间 X 下面的性质是正确的：离散空间 X 到另外的拓扑空间 Y 的任何映射 f 都是连续的. 在这一节中将研究另外一些更重要的拓扑空间类.

1. 连通性

若空间 X 含有不同于 X 和空集 $\varnothing$ 的既开又闭的子集 $Y\subset X$，则称 X 为**不连通的**拓扑空间. 例如，多于一点的任何离散拓扑空间是不连通的，因为它的任何子集既是开的又是闭的. 若空间 X 是不连通的，则可分为两个不相交的非空开子集的并：$X=Y\cup(X\setminus Y)$. 若 X 不能分解为两个不相交的非空开子集的并，则称拓扑空间 X 为**连通的拓扑空间**.

例 1　考察数直线上的闭区间 $[a,b]$. 我们证明闭区间 $[a, b]$ 是连通集. 假设闭区间 $[a,b]$ 表示为两个非空的既开又闭的不相交集的并 $[a,b]=A\cup B$. 不失一般性，假设 $a\in A$. 那么由于 A 是开集，存在这样的 $\varepsilon>0$，使半开区间 $[a,a+\varepsilon)\subset A$，对满足 $[a,a+\varepsilon)\subset A$ 的所有 ε，取 $\varepsilon_0=\sup\{\varepsilon\}$. 那么对任何 $\varepsilon<\varepsilon_0$，有闭区间 $[a,a+\varepsilon]\subset A$，即对任何 $\varepsilon<\varepsilon_0$，$a+\varepsilon\in A$. 由于 A 是闭集，于是 $a+\varepsilon_0\in A$. 对 ε_0 来说，唯一的可能性仅是等式 $a+\varepsilon_0=b$ 成立. 否则 ε_0 就不等于 $\sup\{\varepsilon\}$. 于是，$[a,b]=A$，即 $B=\varnothing$，这与假设矛盾. 类似地可以证明数轴上的开区间 (a,b) 是连通集.

现在证明几个结论，它们有助于说明拓扑空间的连通性.

定理 1 设 $X=\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$，每一个 X_α 是连通的，并且交集 $\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha$ 不空，则空间 X 是连通的.

证明 假定相反的情况成立，即 $X=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，集合 A 和 B 是非空开集. 那么有 $X_\alpha=(X_\alpha\cap A)\cup(X_\alpha\cap B)$. 但因集合 X_α 是连通的，所以或者 $X_\alpha\cap A=\varnothing$，或者 $X_\alpha\cap B=\varnothing$，就是说每一个集合 X_α 或者整个在 A 中，或者整个在 B 中. 其次，因为集合 A 和 B 不是空集，于是有点 $a\in A$，$b\in B$. 设 $a\in X_{\alpha_0}$，那么有 $X_{\alpha_0}\subset A$. 设 $b\in X_{\alpha_1}$，那么有 $X_{\alpha_1}\subset B$. 就有 $X_{\alpha_0}\cap X_{\alpha_1}=\varnothing$，这与定理的条件相矛盾. 定理 1 证完.

定理 2 设在拓扑空间 X 中，对任何两点 $x,y\in X$，有包含它们的连通集 C_{xy}，则 X 是连通的拓扑空间.

证明 设定理的结论不成立，即 $X=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，A,B 是非空开集. 那么可找到点 $a\in A$，$b\in B$. 考察分解式 $C_{ab}=(C_{ab}\cap A)\cup(C_{ab}\cap B)$ 点 $a\in C_{ab}\cap A$，点 $b\in C_{ab}\cap B$. 这就是说集合 $C_{ab}\cap A$ 和 $C_{ab}\cap B$ 是不空的，它们在 C_{ab} 中是开集，并且是不相交的. 得到矛盾.

定理 3 在连续映射下，连通空间的象是连通的.

证明 设 $f: X\to Y=f(X)$ 是连续映射. 条件 $Y=f(X)$ 意味着非空集的原象是不空的. 所以，若 Y 不是连通空间，则 $Y=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，A,B 是开集且不是空集. 于是 $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，集合 $f^{-1}(A)$，$f^{-1}(B)$ 是非空开集，而且是不相交的. 定理证完.

例 2 由定理 3 得到，所有定义在实直线的闭区间 $[a,b]$ 上的连续实函数 $y=f(x)$，可以取到中间的值. 若某个中间的值 y_0 不被函数 f 取到，那么象集 $f([a,b])$ 就分为两个非空开集的并，一个集合中的点小于 y_0，而另一个集合中的点大于 y_0，这与定理 3 相矛盾.

道路连通的概念是应用定理 2 和定理 3 的特殊情形. 若拓扑空间 X 的任何两点 x 和 y 可用曲线段连接起来，则称 X 是**道路连通的**，即存在把数轴上的闭区间 $[0,1]$ 映射到空间 X 的连续映射 $f:[0,1]\to X$，使 $f(0)=x, f(1)=y$.

定理 4 道路连通的拓扑空间 X 是连通的.

事实上，按照定理 3，象 $f([0,1])$ 是连通的，并包含了点 x 和 y，根据定理 2，空间 X 是连通空间.

例 3 我们考察不是道路连通的连通拓扑空间的例子. 设 X 是函数 $y=f(x)=\sin(1/x)$ 图形的闭包，它是二维欧氏空间 R^2 中的集合(图 1). R^2 的度量取经典的度量，即在 R^2 中连接点对的线段的长度. 那么，集合 X 由函数 $y=\sin(1/x)$ 的图形和铅垂线段 $\Gamma_3=\{(x,y): x=0, -1\leqslant y\leqslant 1\}$ 的并组成. 函数 f 的图形分成两个子集，每一个子集都同胚于一个区间: $\Gamma_1=\{(x,y): 0<x<\infty, y=f(x)\}$, $\Gamma_2=\{(x,y): -\infty<x<0, y=f(x)\}$. 所以，若 $X=A\cup B, A\cap B=\varnothing$, A, B 是非空开集，那么子集 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 中每一个都全部在 A 中，或全部在 B 中. 设 $\Gamma_3\subset B$. 容易证明 Γ_3 的任何邻域既与 Γ_1 相交，也与 Γ_2 相交，就是说，$\Gamma_1\subset B, \Gamma_2\subset B$. 即 $A=\varnothing$，这与假设矛盾. 于是，X 是连通空间.

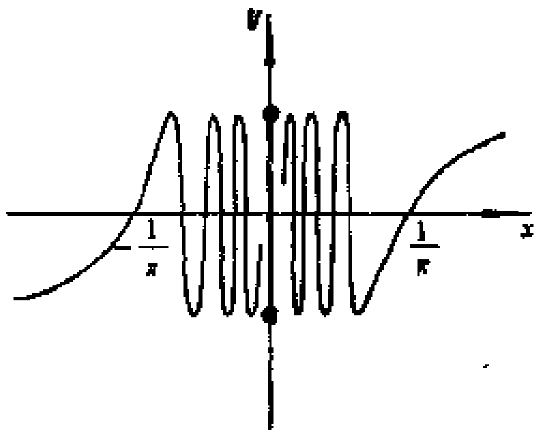


图 1

现在证明，X 不是道路连通的. 考察 X 中两点: $P=(-1/\pi, 0)$ 和 $Q=(1/\pi, 0)$. 假设存在连续映射 $f:[0,1]\to X$, $f(0)=P$, $f(1)=Q$. 映射 f 由两个连续的数值函数给出: $f(t)=(x(t), y(t))$，在 $x(t)\neq 0$ 时，$y(t)=\sin(1/x(t))$. 因为 $x(0)=-1/\pi$，所以对满足 $x(t)=0$ 的那些 t 的下确界 t_0 严格地大于 0, $t_0>0$. 于是，

在区间$[0, t_0)$上满足条件：$x(t)<0, y(t)=\sin(1/x(t))$. 因$x(t)$是连续函数，并且存在序列$t_k\geqslant t_0, t_k\to t_0$，这里$x(t_k)=0$，那么$x(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=0$. 但此时当$t\to t_0-0$时，函数$\sin(1/x(t))$的极限不存在，因而，函数$y(t)$不是连续的. 于是，空间$X$不是道路连通空间.

例 4 考察两个拓扑空间X和Y，作出新的拓扑空间$Z=X\cup Y$，它的点是空间X和Y的点的总和，并且认为空间X和Y没有公共点. 取任何形如$W=U\cup V$的集合作为空间Z的开集，其中$U\subset X$，$V\subset Y$分别是空间X和Y的开集. 空间Z称为**空间X和Y的不连通和**. 空间Z确实是不连通的，因为子空间X和Y是不相交的开子集. 由两个空间X和Y还可以构造一个拓扑空间，称为拓扑空间的**连通和**或**拓扑空间束**. 为此，在空间X和Y中各固定一点$x_0\in X, y_0\in Y$. 考察空间X和Y的并，并在其中把点x_0和y_0看成一个点. 所得的空间用$X\vee Y$表示. 对集合U，若交$X\cap U$和$Y\cap U$分别为X和Y中的开集时，则称U为$X\vee Y$的开集. 若空间X和Y都是连通的，则由定理 2，它们的连通和$X\vee Y$是连通拓扑空间. 若X和Y是道路连通空间，则它们的连通和$X\vee Y$是道路连通空间.

2. 分离公理

X为拓扑空间，若对任何两点$x, y\in X, x\neq y$，存在不相交的邻域$U(x), U(y), U(x)\cap U(y)=\varnothing$，则称$X$为 **Hausdorff** 空间. 不是所有的拓扑空间都是 Hausdorff 空间. 在前面的一节例 2 中，我们考察过由两点x, y组成的空间X，它的开集是$\{\varnothing, X, \{x\}\}$. 那么，$x$，$y$是不同的两点，并且不存在不相交的各点邻域. 在 Hausdorff 空间中，每一点$x\in X$是闭集. 实际上，若$y\neq x$，则存在y的

邻域 $U(y)$，它不包含 x. 于是集合 $X\setminus\{x\}=\bigcup_{y\neq x}U(y)$ 是开集，而它的补(余集)由一点组成，并且是闭集.

离散拓扑是 Hausdorff 空间. 事实上，每一点 $x\in X$ 是开集，就是说，若 $x\neq y$，则邻域 $\{x\}$ 和邻域 $\{y\}$ 是不相交的.

定理 5 设 X 和 Y 都是 Hausdorff 拓扑空间. 则它们的笛卡儿乘积，连通和及不连通和都是 Hausdorff 拓扑空间.

证明 我们考察两点 $(x_1, y_1)\in X\times Y$，$(x_2, y_2)\in X\times Y$. 若这两点不相同，则或者 $x_1\neq x_2$，或者 $y_1\neq y_2$. 在第一种情形，由于 X 是 Hausdorff 空间，则有两个不相交的邻域 $U(x_1)$ 和 $U(x_2)$. 于是点 (x_1, y_1) 的邻域 $U(x_1)\times Y$ 和点 (x_2, y_2) 的邻域 $U(x_2)\times Y$ 也是不相交的. 在第二种情形，由于 Y 是 Hausdorff 空间，则存在不相交的邻域 $V(y_1)$ 和 $V(y_2)$. 所以点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的邻域 $X\times V(y_1)$ 和 $X\times V(y_2)$ 是不相交的.

考察不同的一对点 $x, y\in X\cup Y$. 若两点在一个空间中，比方说在 X 中，那么由于 X 是 Hausdorff 空间，有不相交的邻域 $U(x)$，$U(y)$，并且 $U(x)$，$U(y)$ 同时是并 $X\cup Y$ 的开集. 若点 x，y 在不同的空间中，比方说 $x\in X$，$y\in Y$，则 X，Y 本身就是它们的不相交邻域.

现在考察束 $X\vee Y$ 和其中一对不同的点 x, y. 首先，设两点都在 X 中. 那么其中有一点不等于事先定出的点 $x_0=y_0$，比方说 $x\neq x_0$. 在空间 X 中可找到不相交的邻域 $U(x)$ 和 $U(y)$. 由 $U(x)$ 减去点 x_0，可以认为 $U(x)$ 不包含点 x_0. 那么集合 $U(x)$ 在 $X\vee Y$ 中是开集. 若 $U(y)$ 不包含点 x_0，则它在 $X\vee Y$ 中也是开集. 若 $x_0\in U(y)$，那么集合 $U(y)\cup Y$ 在 $X\vee Y$ 中是开集，并且与 $U(x)$ 不相交. 定理 5 证完.

定义 若拓扑空间 X 是 Hausdorff 空间，并且对任何两个不

相交的闭集 F_1 和 F_2，存在两个不相交的邻域 $U_1\supset F_1$ 和 $U_2\supset F_2$，则称X是**正规的拓扑空间**.

正规空间是最通常的一类拓扑空间. 这类空间是足够广的，并且包含了所有的度量空间.

定理 6 所有的度量空间都是正规的.

证明 设X是度量空间，度量为 ρ, F_1 和 F_2是不相交的闭集. 设$x\in F_1$，$\varepsilon(x)=\frac{1}{3}\rho(x,F_2)$. 令$U_1=\bigcup\limits_{x\in F_1}O_{\varepsilon(x)}(x)$. 类似地，定义开集

$U_2=\bigcup\limits_{y\in F_2}O_{\varepsilon'(y)}(y)$，其中 $\varepsilon'(y)=\frac{1}{3}\rho(y,F_1)$. 从而得到集合 F_1和 F_2

的邻域. 我们证明集合 U_1 和 U_2 是不相交的. 假定它们相交，就是说存在点 $z\in U_1\cap U_2$. 那么存在点 $x\in F_1$ 和 $y\in F_2$，有 $z\in O_{\varepsilon(x)}(x)$，$z\in O_{\varepsilon'(y)}(y)$即 $\rho(x,z)<\frac{1}{3}\rho(x,F_2)$, $\rho(y,z)<\frac{1}{3}\rho(y,F_1)$. 特别，有

$\rho(x,z)<\frac{1}{3}\rho(x,y)$, $\rho(y,z)<\frac{1}{3}\rho(y,x)$. 将后面的两个不等式相

加，得到$\rho(x,z)+\rho(y,z)<\frac{2}{3}\rho(x,y)$，这与三角不等式相矛盾.

定理 6 证完.

设有拓扑空间X的开集族$\{U_\alpha\}$，若 $X=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$，则称$\{U_\alpha\}$为

开覆盖. 在研究拓扑空间时，"覆盖"是一个合适的概念. 例如，若在每一个 U_α 中给出了连续函数 f_α，而在每一个交 $U_\alpha\cap U_\beta$上，函数 f_α 和 f_β 是相同的，则在空间 X 上存在一个连续函数 f，它在每一个开集 U_α 中与 f_α 相同.

设$\{U_\alpha\}$和$\{V_\beta\}$ 是拓扑空间 X 的两个开覆盖. 若每一个开集 V_β 都在某个开集 U_α, $\alpha=\alpha(\beta)$之中，则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 是覆盖$\{U_\alpha\}$的**加细**，或说覆盖$\{V_\beta\}$**更细于**覆盖$\{U_\alpha\}$.

定理7 设 X 是正规的拓扑空间，$\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 是有限开覆盖. 则存在更细的覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$，而且 $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

证明 在定理7中所断定的不单是存在更细的覆盖，而是在该覆盖中的元素仍以指标 α 编号，并且集合的包含是对同一个指标值 α 进行的. 我们考察在 U_1 中的闭集 $X\setminus\bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha$. 由于空间 X 的正规性，存在邻域 V_1，使 $X\setminus\bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$. 那么集合系 $\{V_1, U_2, \cdots, U_N\}$ 覆盖空间 X. 从而，可以找到集合 $V_2 \subset \bar{V}_2$，而且集合系 $\{V_1, V_2, U_3, \cdots, U_N\}$ 也覆盖空间 X. 依次地用集合 $V_k \subset \bar{V}_k \subset U_k$ 代替 U_k，在 N 次后，得到所要求的覆盖 $\{V_1, \cdots, V_N\}$.

§2 习　　题

1. 证明：若从 $R^n(n\geqslant 2)$ 中删去有限(或可数)个点，留下的空间仍然是连通的.

2. 证明：若从 R^n 中删去维数小于 $n-1$ 的有限个子空间，则留下的空间仍是连通的.

3. 计算用有限多条直线把 R^2 最多能分成多少个连通分支，最少能分成多少个连通分支？

4. 设 $f: X\to X$ 是 Hausdorff 空间的连续映射. 证明不动点(即 $f(x)=x$)的集合是闭集.

5. 证明：将正则空间映入 Hausdorff 空间的连续映射，在此映射下的象是正则的.

6. 证明：空间 X 是 Hausdorff 空间的充要条件是对角线 $\Delta=\{(x,y): x=y\}\subset X\times X$ 在 $X\times X$ 中是闭集.

7. 证明：映入 Hausdorff 空间 Y 的映射 $f: X\to Y$ 是连续的充要条件为：图形 $\Gamma_f=\{(x,f(x)): x\in X\}\subset X\times Y$ 在 $X\times Y$ 中是闭集.

§3 紧致空间

在这一节中我们研究紧致性，这是拓扑空间的重要性质之一．这个性质，特别是在研究实数和连续函数时，是基本的性质．

1．定义

设 X 为 Hausdorff 空间，若每一个开覆盖$\{U_\alpha\}$都具有覆盖X的有限部分$\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$，则称X是**紧致的**．可以只要求存在更细的有限覆盖．

注 最初，这样的空间称为**列紧的**，而列紧的度量空间称为紧致空间．但是近来的文献中喜欢简单地称列紧空间为紧致空间．我们将采用后来的术语．

例 1 实数的区间$[a,b]$是紧致空间．实际上，若$\{U_\alpha\}$是区间$[a,b]$的开覆盖，那么不失一般性，可以认为覆盖的每一个元素U_α是区间(c_α,d_α)（除两个半开区间$[a,a')$和$(b',b]$外）．设数$x\in[a,b]$，能使区间$[a,x]$被有限个U_α所覆盖，我们考察所有这样的数x的集合P．那么，若$x\in P$，$y<x$，则y也属于P．因为a属于覆盖的元素$[a,a')$，$a'>a$，则组成集合P的元素多于一个点a．设x_0是集合P的上确界，$x_0>a$．若$x_0<b$，则x_0在某个区间$U_{\alpha_0}=(c_{\alpha_0},d_{\alpha_0})$中，即$c_{\alpha_0}<x_0<d_{\alpha_0}$．设$y,z$是满足$c_{\alpha_0}<y<x_0<z<d_{\alpha_0}$的数，则$y\in P$，也就是说有限个集合$U_\beta$覆盖了区间$[a,y]$，所以区间$[a,z]$也被有限个集合$U_\beta$所覆盖．于是，$x_0$不是集合$P$的上确界．这样，便有$x_0=b$．这时$b'<x_0=b$．若$b'<y<x_0$，则$y\in P$，而且区间$[a,y]$仍被有限个集合$U_\beta$所覆盖，而与$(b',b]$一起，整个区间$[a,b]$被有限个集合$U_\beta$所覆盖．

2．紧致空间的性质

定理 1 紧致拓扑空间是正规的．

证明 设X是紧致空间，F在X中是闭集．我们要证明，若点X不属于F，则可找到不相交的邻域$U(x)$和$U(F)$．

引理 1 紧致空间X的闭子集F本身是紧致空间．

事实上，若$\{V_\alpha\}$是集F的开覆盖，那么每一个$V_\alpha=U_\alpha\cap F$，其中U_α在X中是开集．于是开集族$\{U_\alpha, X\setminus F\}$覆盖了空间$X$．从而存在有限个开集$\{U_{\alpha_k}, X\setminus F\}$覆盖$X$．于是$\{V_{\alpha_k}\}$覆盖集$F$．

回到定理1的证明上来．因为$x\overline{\in}F$，所以对任何点$y\in F$，由于X是Hausdorff空间，存在不相交的邻域$U_y\ni x$，$V_y\ni y$．很明显，族$\{V_y\}$覆盖集合F．根据引理1，可找到有限个集$\{V_{y_k}\}_{k=1}^N$覆盖集合F．所以点x的邻域$\bigcap\limits_{k=1}^{N}U_{y_k}$与并$\bigcup\limits_{k=1}^{N}V_{y_k}\supset F$不相交．

现在考察紧致空间X中两个不相交的闭集F_1, F_2．那么对任何点$x\in F_1$，存在点x的邻域U_x和集合F_2的邻域V_x，且$U_x\cap V_x=\varnothing$．族$\{U_x\}$覆盖了紧致集F_1，所以存在有限覆盖$\{U_{x_k}\}_{k=1}^N$．这时，并$\bigcup\limits_{k=1}^{N}U_{x_k}$包含$F_1$，并且与包含$F_2$的交$\bigcap\limits_{k=1}^{N}V_{x_k}$不相交．定理1证完．

定理 2 设$F\subset X$是Hausdorff拓扑空间X的紧致子空间，则F在空间X中是闭集．

证明 设x是空间X的不属于F的任意点．由于X是Hausdorff空间，对点$y\in F$，存在不相交的邻域$U_y\ni y$和$V_y\ni x$．则族$\{U_y\}$覆盖集合F，而由于它的紧致性，存在有限族$\{U_{y_k}\}_{k=1}^N$覆盖F．那么并$\bigcup\limits_{k=1}^{N}U_{y_k}$包含集合$F$，并且与交$\bigcap\limits_{k=1}^{N}V_{y_k}$不相交．于是点$x$有与集合$F$不相交的邻域，这就是说集合$F$是闭集．定理2证完．

定理 3 设$f: X\to Y$是紧致空间X到空间Y的连续映象．则

象 $f(x)$ 是紧致空间.

证明 设 $\{U_\alpha\}$ 是集合 $f(x)$ 的开覆盖. 那么族 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ 是紧致空间 X 的开覆盖. 于是，某个有限族 $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^{N}$ 覆盖了空间 X. 这时族 $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$ 覆盖了象 $f(x)$. 定理 3 证完.

由定理 2 和定理 3 得出数学分析教程中已经知道的，紧致空间上连续函数的下列性质.

定理 4 设 $f: X\to \boldsymbol{R}^1$ 是紧致空间 X 上的连续函数，则函数 f 是有界的，并且取到最大值和最小值.

证明 按照定理 3，象 $f(X)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的紧致子空间，而按照定理 2，象 $f(X)$ 是闭集. 假如象 $f(X)$ 不是有界的，那么区间族 $U_n=(-n, n)$ 覆盖 $f(X)$，并从中不可能分出有限子覆盖. 假设 $A=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$，则存在这样的序列 $x_n\in X$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，即 $A\in f(X)$，$A=f(x_0)$，$x_0\in X$. 类似地，$B=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ 也是函数 f 的某个值. 定理 4 证完.

3. 紧致的度量空间

对度量空间来讲，紧致的性质可以用分析中所熟悉的术语来叙述.

定理 5 设 X 是度量空间. 空间 X 是紧致的充要条件为满足下列等价的性质之一:

1°. 任何序列 $\{x_n\}$ 有收敛子序列.

2°. 任何非空的闭子集套序列 $\{F_n\}$，$F_n\supset F_{n+1}$，有非空的交.

证明 设 X 是紧致的度量空间，$\{F_n\}$ 是非空的闭集套 $F_n\supset F_{n+1}$，如果 $\bigcap F_n=\varnothing$，则开集 $G_n=X\setminus F_n$ 覆盖空间 X，而且 $G_n\subset G_{n+1}$. 由于空间 X 的紧致性，有限个 $\{G_{n_1}, \cdots\cdots, G_{n_s}\}$ 覆盖了空间 X. 不失一般性，可认为 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_s$. 那么 $G_{n_k}\subset G_{n_s}$，即 X

$=G_{n_s}$. 于是 $F_{n_s}=\varnothing$，这与条件相矛盾.

其次，我们证明由性质 2° 可以推出性质 1°. 设 $\{x_n\}$ 是空间 X 的任意点列. 若序列 $\{x_n\}$ 没有极限点，那么任何子集 $F\subset\{x_n\}$ 是闭集. 所以我们可以作出非空的闭子集套 $\{F_n\}$，$F_n=\{x_{n+1}, x_{n+2},\cdots\}$，而 $\{F_n\}$ 的交集是空集. 于是，根据性质 2°，序列 $\{x_n\}$ 有极限点 $x_0\in X$. 现在来取收敛于点 x_0 的子序列 $\{x_{n_k}\}$. 考察邻域 $O_1(x_0)$，存在这样的号码数 n_1，使 $x_{n_1}\in O_1(x_0)$. 设已作出了 $\{x_{n_1},\cdots,x_{n_s}\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_s$，而且 $\rho(x_0,x_{n_k})<1/k$. 设

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{s+1},\rho(x_0,x_1),\cdots,\rho(x_0,x_s)\right\}.$$

那么可在邻域 $O_\varepsilon(x_0)$ 中找到点 $x_{n_{s+1}}\in O_\varepsilon(x_0)$. 很清楚，$\rho(x_0,x_{s+1})<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{s+1}$，并且因此 $n_{s+1}>n_s$. 按照归纳法，构造出序列 $\{x_{n_s}\}$，并且 $\lim\limits_{s\to\infty}\rho(x_0,x_{n_s})=0$，这就是说 $\lim\limits_{s\to\infty}x_{n_s}=x_0$.

最后，我们证明从性质 1° 可以得到空间 X 的紧致性. 设 $\{U_\alpha\}$ 是度量空间 X 的任何开覆盖. 假定存在这样的数 ε，使球覆盖 $\{O_\varepsilon(x):\ x\in X\}$ 内接① 于覆盖 $\{U_\alpha\}$. 则数 ε 称为覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数.

引理 1 若定理 5 的条件 1° 被满足，则每一个开覆盖有 Lebesgue 数.

证明 对每点 $x\in X$，取数 $\varepsilon(x)$：它等于使球 $O_\delta(x)$ 落入某个覆盖元素 U_α 的这些 δ 的上确界. 若函数 $\varepsilon(x)$ 有严格正的下确界 $\varepsilon_0=\inf\limits_{x\in X}\varepsilon(x)$，那么数 ε_0 是覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数. 若 $\inf\limits_{x\in X}\varepsilon(x)=0$，则可找到这样的序列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(x_n)=0$. 根据性质 1°，可以选取这样的序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. 设 k_0 是这样的指标数，

① “вписано в покрытие $\{U_\alpha\}$”，这里译为“内接于覆盖 $\{U_\alpha\}$”，意思是 ε 是使 $\{O_\varepsilon(x):x\in X\}$ 为 $\{U_\alpha\}$ 加细的最大正数——译注.

当 $k>k_0$ 时，$\rho(x_0, x_{n_k})<\frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$．于是，$O_{\frac{1}{4}\varepsilon(x_0)}(x_{n_k})\subset O_{\frac{1}{2}\varepsilon(x_0)}(x_0)\subset U_\alpha$．这就是说，$\varepsilon(x_{n_k})>\frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$，也就是说，极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon(x_{n_k})\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon(x_0)>0$．引理 1 证完．

现在考察任何覆盖$\{U_\alpha\}$．根据引理 1，球覆盖$\{O_\varepsilon(x):x\in X\}$内接于覆盖$\{U_\alpha\}$．假定覆盖$\{U_\alpha\}$没有有限子覆盖．那么覆盖$\{O_\varepsilon(x):x\in X\}$也没有有限子覆盖．固定任意的点 $x_1\in X$．因为球 $O_\varepsilon(x_1)$不覆盖空间 X，则可找到点 $x_2\overline{\in}O_\varepsilon(x_1)$．假定已作出点 $x_1, \cdots, x_n$，使 $x_k\overline{\in}O_\varepsilon(x_s)$对 $n\geqslant k>s$ 成立．球系$\{O_\varepsilon(x_1), \cdots, O_\varepsilon(x_n)\}$不覆盖空间 X．所以可以找到点 $x_{n+1}\overline{\in}O_\varepsilon(x_1)\cup\cdots\cup O_\varepsilon(x_n)$．于是根据归纳法作出点序列$\{x_n\}$，而且$\rho(x_k, x_n)\geqslant\varepsilon>0$．另一方面，根据性质 1°，存在序列$\{x_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_{n_k}, x_0)=0$．特别，适当选取指标数 k_0，当 $k>k_0$ 时，有$\rho(x_{n_k}, x_0)<\frac{1}{2}\varepsilon$．那么

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})\leqslant\rho(x_{n_k}, x_0)+\rho(x_{n_{k+1}}, x_0)<\varepsilon.$$

此矛盾证明了定理 5.

作为定理 5 的推论，我们导出实数的基本性质：实直线上的闭线段套有公共点．

4. 在紧致空间上的运算

如果 Hausdorff 空间 X 是它自己的有限个紧致子空间的并，则 X 是紧致空间．事实上，若 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}X_k$，$X_k$ 是紧致空间，$\{U_\alpha\}$是空间 X 的开覆盖，则每一个子空间 X_α 被有限个元素$\{U_{\alpha_{k,1}}, \cdots, U_{\alpha_{k,n_k}}\}$所覆盖．那么，所有有限个元素的总和$\{U_{\alpha_{k,s}}, 1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant$

$s\leqslant n_k\}$覆盖了整个空间 X. 下面的定理是比较困难的，但是重要的.

定理 6 紧致空间 X 和 Y 的笛卡儿乘积 $X\times Y$ 是紧致空间.

证明 由 §2 定理 5，笛卡儿乘积 $X\times Y$ 是 Hausdorff 空间. 设 $\{U_\alpha\}$ 是空间 $X\times Y$ 的任意的覆盖. 不失一般性，可以认为 U_α 具有形式 $U_\alpha=V_\alpha\times W_\alpha$. 我们取点 $x\in X$，并考察子空间 $x\times Y\subset X\times Y$. 子空间 $x\times Y$ 同胚于空间 Y，并且因此是紧致空间. 所以存在有限个元素 $\{U_{\alpha(k,x)}\}_{k=1}^{n(x)}$，它们覆盖空间 $x\times Y$. 假定 $V'_x=\bigcap\limits_{k=1}^{n(x)}V_{\alpha(k,x)}$. 那么开集 $\{V'_x\times W_{\alpha(k,x)}\}$ 内接于覆盖 $\{U_\alpha\}$，并且覆盖空间 $x\times Y$. 集合 $\{W_{\alpha(k,x)}\}_{k=1}^{n(x)}$ 覆盖空间 Y，$\bigcup\limits_{k=1}^{n(x)}W_{\alpha(k,x)}=Y$. 集合 $\{V'_x\}$ 覆盖空间 X. 由于空间 X 的紧致性，有限族 $\{V'_{x_s}\}_{s=1}^{m}$ 覆盖空间 X. 那么，有限族 $\{V'_{x_s}\times W_{\alpha(k,x_s)}: 1\leqslant s\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n(x_s)\}$ 覆盖空间 $X\times Y$. 定理 6 证完.

注 如果空间 X 和 Y 是度量空间，那么定理 6 的证明可大大简化. 实际上，按照定理 5，我们考察序列 $\{z_n\}$，$z_n=(x_n,y_n)$. 因为 X 是紧致空间，那么存在收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$. 而由于空间 Y 的紧致性，从序列 $\{y_{n_k}\}$ 中分出收敛子序列 $\{y_{n_{k_s}}\}$. 于是，子序列 $\{z_{n_{k_s}}\}$ 也收敛.

§3 习 题

1. 证明有限个紧致空间的并是紧致的.

2. 证明：若 X 是非紧致的度量空间，则在此空间上存在连续而非有界的函数.

3. 证明紧致的度量空间有可数个稠密的子空间.

4. 证明：在紧致的度量空间中，若两个闭集 A 和 B 不相交，则 $\rho(A,B)>0$.

§4 函数的可分离性 1的分解

在这一节中，我们引出一些定理，使得在相当弱的假定下，也象一元实变函数那样进行连续函数的分析. 如早先已指出的那样，拓扑空间上的连续函数在许多方面也象一元实变函数一样. 两个连续函数的和 $f+g$，乘积 $f\cdot g$ 以及在 $g\neq 0$ 时的比 f/g，它们都是连续函数. 在拓扑空间 X 上的连续函数类中可以求极限. 设有函数序列 f_n，若对任意 $\varepsilon>0$，存在这样的指标 N，使当 $n>N$ 时，对任何点 $x\in X$ 满足不等式 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$，则称 f_n **均匀收敛于函数 f.**

定理 1 在拓扑空间 X 上的连续函数序列的均匀极限是连续函数.

证明 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. 我们证明函数 f 是连续的. 固定数 $\varepsilon>0$ 和点 $x_0\in X$. 那么可以找到这样的指标数 n，使得对任何点 $x\in X$，满足不等式 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3$. 因为函数 f_n 连续，则存在邻域 $O(x_0)$，使当 $x\in O(x_0)$ 时，满足不等式 $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon/3$. 于是，在 $x\in O(x_0)$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)|&<|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|\\
&+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

定理 1 证完.

1. 函数的可分离性

若 F_1,F_2 是拓扑空间 X 中的两个不相交的闭集，那么为了作出集合 F_1 和 F_2 的不相交的邻域，在空间 X 上只要作出这样的连续函数 f 即可：设 $a>b$，

$$
f(x)\begin{cases}\geqslant a, & 当\ x\in F_1,\\ \leqslant b, & 当\ x\in F_2.\end{cases}
$$

这时，可以选取区间 (c,∞)，$(-\infty,c)$ $(b<c<a)$ 的原象 $f^{-1}((c,$

$\infty)), f^{-1}((-\infty, c))$分别作为集合 F_1 和 F_2 的邻域. 在某种意义下，其相反的论断也是正确的，这就是 Урысон 引理.

定理 2 设 X 是正规拓扑空间，F_0, F_1 是两个不相交的闭集. 则存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使 $f|F_0\equiv 0, f|F_1\equiv 1$.

证明 作出这样的一系列开集 Γ_r，用所有的二进位有理数 r $(0\leqslant r\leqslant 1)$编上号码，且满足下面的条件：1) $F_0\subset\Gamma_0$，2) $\overline{\Gamma}\subset X\backslash F_1$，3) 当 $r<r'$ 时，$\overline{\Gamma}_r\subset\Gamma_{r'}$.

于是，可以扩大开集系$\{\Gamma_r\}$，在其中增加 $\Gamma_t=\bigcup\limits_{r<t}\Gamma_r$，这里 t 已是满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的任意实数. 开集系$\{\Gamma_t\}$满足同样的条件：$\overline{\Gamma}_t\subset\Gamma_{t'}$，当 $t<t'$ 时成立. 实际上，取有理数 r, r'，使 $t<r<r'<t'$，得到 $\Gamma_t\subset\Gamma_r$，$\Gamma_{r'}\subset\Gamma_{t'}$，于是 $\overline{\Gamma}_t\subset\overline{\Gamma}_r\subset\Gamma_{r'}\subset\Gamma_{t'}$. 现在作连续函数 $f: X\to[0,1]$，假定 $f(x)=\sup\{t: x\overline{\in}\Gamma_t\}$. 我们证明 f 是连续函数. 固定一点 x_0 和 $e>0$，设 $t_0=f(x_0)$. 由函数 f 的定义：$x_0\overline{\in}\Gamma_{(t_0-\varepsilon/2)}$，$x_0\in\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$. 我们考察点 x_0 的邻域 U，$U=\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}\backslash\overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. 于是，若 $y\in U$，则 $y\in\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$，$y\overline{\in}\overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. 根据函数 f 的定义，满足不等式：$t_0-\varepsilon/2\leqslant f(y)\leqslant t_0+\varepsilon/2$，即$|f(x_0)-f(y)|<e$. 于是，函数 f 是连续的.

为完成定理 2 的证明，剩下的是作出满足条件 1)，2)，3)的开集系 Γ_r. 由空间 X 的正规性，对任何闭集 F 和它的邻域 U，$F\subset U$，存在另外的开集 V，使 $F\subset V\subset\overline{V}\subset U$. 为简便起见，若 $V\subset\overline{V}\subset U$，就写为$V\Subset U$. 于是，$F_0=\overline{F}_0\subset X\backslash F_1$，可写为 $F_0\Subset X\backslash F_1$. 因此，可找到开集 Γ_0，使 $F_0\Subset\Gamma_0\Subset X\backslash F_1$. 类似地，可找到开集 Γ_1，使 $F_1\Subset\Gamma_0\Subset\Gamma_1\Subset X\backslash F_1$. 假设对所有的二进分数 $r=p/2^n$，$0\leqslant p\leqslant 2^n$，已作出了开集 Γ_r，而且 $\Gamma_{(p/2^n)}\Subset\Gamma_{((p+1)/2^n)}$. 那么可定义集合 $\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}$，使 $\Gamma_{p/2^n}\Subset\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}\Subset\Gamma_{(p+1)/2^n}$. 根据归纳法，可作出所有的开集系$\{\Gamma_r\}$. 若 $x\in F_0$，则 $f(x)=0$，而若 $x\in F_1$，则

$f(x)=1$. 这样，便证明了定理 2.

由定理 2 可以得到下面的重要定理.

定理 3 设 X 是正规拓扑空间，$F\subset X$ 是闭集，$f:F\to\mathbf{R}^1$ 是 F 上的连续函数. 那么函数 F 可延拓为整个空间 X 上的连续函数 $g:X\to\mathbf{R}^1$. 若函数 f 是有界的，$|f(x)|\leqslant A$，则 g 也有界，并可取同样的常数为界：$|g(x)|\leqslant A$.

证明 首先假设 f 有界，$|f(x)|\leqslant A$. 设 $\varphi_0(x)=f(x)$ 并考察两个闭子集 $A_0=\{x:\varphi_0(x)\leqslant -A/3\}$，$B_0=\{x:\varphi_0(x)\geqslant A/3\}$. 因为集合 A_0 和 B_0 不相交，所以按照定理 2，存在连续函数 $f_0:x\to[-A/3,A/3]$，在集合 A_0 上等于 $-A/3$，在集合 B_0 上等于 $A/3$. 换句话说，$|f_0(x)|\leqslant A/3, x\in X$，$|\varphi_0(x)-f_0(x)|\leqslant 2A/3$. 设 $\varphi_1=\varphi_0(x)-f_0(x)$. 则函数 φ_1 在集合 F 上有界，以常数 $2A/3$ 为界. 所以，重复整个过程，可以作出两个不相交的闭集：$A_1=\{x:\varphi_1(x)\leqslant -2A/9\}$，$B_1=\{x:\varphi_1(x)\geqslant 2A/9\}$，并且有连续函数 $f_1:X\to[-2A/9,2A/9]$，它在集合 A_1 上等于 $-2A/9$，在集合 B_1 上等于 $2A/9$. 换句话说，$|f_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}A$，$|\varphi_1(x)-f_1(x)|\leqslant 4A/9$. 重复所指出的过程无限次，我们作出了两个函数序列：$f_n:X\to\mathbf{R}^1$，$\varphi_n:F\to\mathbf{R}^1$，满足下面的条件：$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-f_n(x)$，

$$|f_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{A}{3},\tag{1}$$

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n A.\tag{2}$$

还有，当 $x\in F$ 时，

$$f(x)=\varphi_0(x)=f_0(x)+\varphi_1(x)=\cdots$$
$$\cdots=f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)+\varphi_{n+1}(x).$$

由于不等式(1)，级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ 在整个空间 X 上均匀收敛. 按照

定理1，$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$是连续函数，且$x\in F$时，$g(x)=f(x)$．由于不等式(1)：

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{A}{3}=A.$$

对f为有界函数的情形定理3证完．

对一般的情形，我们考察同胚：$h:\boldsymbol{R}^1\to(-1,1)$．则复合$hf$：$F\to(-1,1)$是连续有界函数．对有界函数$hf$应用定理3，作出连续函数$g:X\to[-1,1]$，它是将函数$hf$延拓而得到的函数．函数在与集合$F$不相交的某个闭集$F_1$上取到值$\pm1$．按照定理2，存在连续函数$\psi:X\to[0,1]$，它在集合$F$上等于1，而在集合$F_1$上等于0．从而函数$g_1(x)=\psi(x)g(x)$，$x\in X$与函数$hf$在集合$F$上完全相同，并且不取值$\pm1$．于是，函数$g_1$映射空间$X$到区间$(-1,1)$．最后，设$g_2(x)=h^{-1}g_1(x)$．则当$x\in F$时，$g_2(x)=h^{-1}g_1(x)=h^{-1}hf(x)=f(x)$．定理3完全得证．

2. 1的分解

f为拓扑空间X上的连续函数，称由使$f(x)\neq0$的$x\in X$组成的点集的闭包为**f的支集**．函数f的支集用supp$f$表示．于是在支集外面，函数f恒等于0．拓扑学中一个有名的方法是把函数分解为这样的和，使其每一个被加项有足够小的支集．

定理4 设X是正规空间，$\{U_\alpha\}$是有限开覆盖．则存在函数$\varphi_\alpha:X\to\boldsymbol{R}^1$，$0\leqslant\varphi_\alpha(x)\leqslant1$，使$1°\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset U_\alpha$，$2°\sum_\alpha\varphi_\alpha(x)\equiv1$．

定理4中所指出的函数系$\{\varphi_\alpha\}$称为**附属于覆盖$\{U_\alpha\}$的1的分解**．同时，可以不假设有限覆盖，而只假设每一点x具有仅与有限个支集supp φ_α相交的邻域$O(x)$．一般，拓扑空间X的子集系

$\{A_\alpha\}$，若对任意点 x，有邻域 $O(x)$，它仅与有限个集合 A_α 有非空的交，则称$\{A_\alpha\}$为**局部有限系**.

例 实直线 R^1 用区间$(-n,n)$来覆盖，这覆盖不是局部有限的. 而用区间$(n,n-2)$来覆盖，这覆盖是局部有限的.

于是，若连续函数 φ_α 的支集系$\{\mathrm{supp}\varphi_\alpha\}$是局部有限的，则在每一点 $x\in X$，仅有有限个函数 φ_α 不等于 0. 所以和 $\varphi(x)=\sum\limits_\alpha\varphi_\alpha(x)$在每一点 $x\in X$ 都有恰当的定义. 所得到的函数是连续的. 实际上，只要在每一点 x 的某个邻域中独立地验证函数连续的条件就足够了. 因为系$\{\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha\}$是局部有限的，所以存在邻域 $O(x)$，在此邻域中仅有有限个函数 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_N}$ 不等于 0. 于是在邻域 $O(x)$中，函数 φ 的定义中的无穷和，实质上是有限项的和，即 $\varphi(y)=\sum\limits_{k=1}^{N}\varphi_{\alpha_k}(y)$，$y\in O(x)$. 所以函数在 X 的每一点 $x\in X$ 是连续的.

定理 4 的证明 考察有限覆盖$\{U_\alpha\}$. 根据§2 的定理 7，可以找到更细的覆盖$\{V_\alpha\}$，并且$\bar V_\alpha\subset U_\alpha$. 按照定理 2，存在空间 X 上的连续函数 ψ_α，满足条件：$\psi_\alpha|\bar V_\alpha=1$，$\psi_\alpha|(X\setminus U_\alpha)\equiv 0$，$0\leqslant\psi_\alpha(x)\leqslant 1$. 这就是说，$\mathrm{supp}\,\psi_\alpha\subset U_\alpha$，且当 $x\in V_\alpha$ 时，$\psi_\alpha(x)>0$. 设 $\psi(x)=\sum\limits_\alpha\psi_\alpha(x)$. 函数 ψ 是连续的. 我们指出在每一点 $x\in X$，$\psi(x)>0$. 实际上，因为系$\{V_\alpha\}$覆盖空间 X，所以有这样的指标 α_0，使 $x\in V_{\alpha_0}$，即 $\psi_{\alpha_0}(x)>0$. 于是 $\psi(x)=\sum\limits_\alpha\psi_\alpha(x)\geqslant\psi_{\alpha_0}(x)>0$. 最后，令 $\varphi_\alpha(x)=\psi_\alpha(x)/\psi(x)$. 则

$$\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha=\mathrm{supp}\,\psi_\alpha\subset U_\alpha,\quad 0\leqslant\varphi_\alpha(x)\leqslant 1.$$

并且

$$\sum_\alpha\varphi_\alpha(x)=\Sigma\psi_\alpha(x)/\psi(x)=(\Sigma\psi_\alpha(x))/\psi(x)=\psi(x)/\psi(x)=1.$$

定理 4 证完.

注 定理 4 可推广到局部有限开覆盖的情形. 为此，只要把§2 的定理 7 推广到局部有限的覆盖情形即可. 若空间 X 是紧致的，那么总能限于有限覆盖. 对非紧致空间的情形，本质上常是无限覆盖，但仍然须作出 1 的分解. 所以，在给出的覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中，能成功地作出局部有限的内接覆盖，那么也可作出 1 的分解. 我们叙述结论而不加证明.

设 $X\subset R^n$ 是欧氏空间的任何子空间，$\{U_\alpha\}$ 是它的开(不必是有限的)覆盖. 则存在附属于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 1 的分解.

§4 习 题

1. 证明：若 X 是欧氏空间 R^n 时，则在定理 2 中可要求函数是光滑的.

2. 证明：在 $X=R^n$ 时，则在定理 4 中可以要求函数 φ_α 是光滑的.

第三章 光滑流形①(一般理论)

引 言

在第一章中，已经用不同的例子说明了描述点在空间位置的坐标系是研究几何对象的主要工具. 借助于坐标系就可以利用微积分的方法来解决许多问题. 所以在几何中分出独立的一章来研究这样的空间，这种空间允许有象可微函数或光滑函数，微分运算以及积分运算这样的概念.

考察几个这种空间的例子是有益的.

例 1 考察平面(即二维欧氏空间 R^2)上单位半径的圆周 S^1. 为了借助于坐标系来描述圆周的点，我们把它作为满足方程的点的集合来给出:

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

其中 (x, y) 是平面上点的笛卡儿坐标. 于是，每一点 $P\in S^1$ 由数对——笛卡儿坐标 x 和 y 唯一地给出. 但是对圆周上的点，给出 x 和 y 两个坐标是多余的. 若我们已经知道点 P 的坐标 x，那么第二个坐标 y 可由方程(1)得到: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，即第二个坐标 y 从第一个坐标 x 唯一地(可相差一个符合)得到. 并且，若点 $P_0=(x_0, y_0)$ 的位置不在横轴上，即 $y_0\neq 0$，那么可找到点 P_0 的足够小的邻域 U，使对一切的点 $P\in U$，其 y 坐标符号的选择唯一地由点 P_0 的坐标 y_0 的符号所确定. 在某种意义下，我们可以说，圆周 S^1 上的点可由一个参数描述，这参数就是它的第一个笛卡儿坐标 x. 更确切地说，仅仅可以断定，在上半圆周中的点，即满足不等式 $y>0$ 的

① 即微分流形——译注.

点，唯一地由一个参数 x 给出．类似地，在下半圆周中的点，即满足不等式 $y<0$ 的点，也唯一地由一个参数 x 给出．无论是上半圆周，还是下半圆周，参数 x 的变化范围是同一个，这就是实轴上的区间 $(-1,1)$．如果我们希望用类似方式以参数来描述包括剩下的"特别"点 $P_0=(1,0)$，$P_1=(-1,0)$ 在内的圆周上的点，那么交换坐标 x 和 y 的地位，并从方程(1)用坐标 y 来表示坐标 x 就可以了．

要问，直接以某个参数值唯一地给出圆周上所有的点，这样进行圆周 S^1 上的点的参数化不行吗？对这个问题的答案，最接近于理想的方案是取角参数 φ，φ 是横轴与末端在 P 点的向径之间的角．但是角参数的确定不是唯一的．如果我们限制角 φ 的值于某个区间上，比方说 $0<\varphi\leqslant 2\pi$，那么将点 $P\in S^1$ 与角参数值 φ 相对应的这个函数在点 $P_0=(1,0)$ 将发生间断．

于是，可以作出下面的结论：在圆周 S^1(象在拓扑空间上一样)上不存在这样的连续函数，它的值可唯一地确定圆周的点．

例 2 作为第二个例子，我们考察三维欧氏空间中由方程

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{2}$$

给出的二维球 S^2．

与圆周的情形一样，对球面 S^2 的点，给出所有的三个笛卡儿坐标 (x,y,z) 是多余的，因为，比方说，可以用前两个坐标来表示坐标 z：$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$．很显然，在上半球面(类似地，在下半球面)点 P 的坐标 z 唯一地用前两个坐标 x 和 y 表示．

可以表明，在二维球面 S^2 的情形也不可能找到两个连续函数，按照此两函数的值唯一地确定球面上的点 P．

我们所考察的例子指出，仅有一条出路——放弃对所考察空间的所有点构造统一坐标系的企图，而是对于空间的不同部分用它自己的坐标系就算满足了．这个构造的严格描述就在几何上引出专门的流形的概念．

§1 流形的概念

1. 基本的定义

若度量空间 M 的每一点 P 都包含在同胚于欧氏空间 R^n 某一区域 V 的邻域 $U\subset M$ 中，则称 M 为 **n 维流形**(或简称为流形)．这个条件简略地用下面的方式来叙述：n 维流形 M 局部地与欧氏空间 R^n 的区域同胚．并且说**流形 M 的维数**等于 n，或 $\dim M=n$．于是，若 M 是 n 维流形，那么在空间 M 中可以指出开集系$\{U_i\}$，它以指标 i 的某个集合(有限集或无限集)编号，和集合 U_i 到区域 V_i 的同胚 $\varphi_i: U_i\to V_i\subset R^n$．并且开集系$\{U_i\}$应该覆盖空间 M：$M=\bigcup\limits_i U_i$．一般地说，区域 V_i 之间可以相交．

假设在欧氏空间 R^n 中建立了某个笛卡儿坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$．那么，对所有的点 $P\in U_i$，点 $\varphi_i(P)\in V_i$ 的笛卡儿坐标可用来使点 P 参数化．所以同胚 φ_i 称为**坐标同胚**，点 $\varphi_i(P)$的笛卡儿坐标$(x^1,\cdots,x^n)$称为点 $P\in U_i$ 的**局部坐标**，并写为 $x^k=x^k(P)$①，$k=1,\cdots,n$．在开集 U_i 上给出的函数组 $x^k=x^k(P)$ 称为**局部坐标系**，开集 U_i 和在 U_i 上建立的局部坐标系一起称为流形 M 的**坐标图**，或简称为**图**．于是，图就是一对(U_i,φ_i)，并且为简便起见，常常仅用第一个记号 U_i 表示它．图的全体$\{U_i\}$覆盖了整个流形 M，$\{U_i\}$称为**图册**．点 $P\in M$的局部坐标编上补充的指标，即图编上自己的号码，U_i：$x_i^k=x_i^k(P)$，这样表示是方便的．因为点 P 可能同时属于几个图表，所以它具有几组局部坐标．

我们考察流形的最简单的例子．

---

① 严格地说，在欧氏空间 R^n 中的笛卡儿坐标$(x^1,\cdots,x^n)$是定义在 R^n 上的线性函数，而使向量 $\vec{a}\in R^n$ 与它的坐标组$(x^1(\vec{a}),\cdots,x^n(\vec{a}))$对应，确定了 R^n 到 n 维线性算术空间的映射．所以写作 $x^k=x^k(P)=x^k(\varphi_i(P))$ 较好．若不引起误解的话，为简便起见，我们就省略掉记号 φ_i．

例 1 在本章引言中我们考察了由方程 $x^2+y^2=1$ 给出的圆周 $S^1\subset\mathbf{R}^2$. 我们用下面四个图组成的图册来覆盖 S^1(图 1,2):

$$U_1=\{(x,y)\in S^1: y>0\},\quad U_2=\{(x,y)\in S^1: y<0\},$$

$$U_3=\{(x,y)\in S^1: x>0\},\quad U_4=\{(x,y)\in S^1: x<0\}.$$

它们对应的区域 V_1,V_2,V_3,V_4 在实直线 $\mathbf{R}^1$ 上是一致的, 并且等于开区间 $(-1,1)$. 我们构造同胚 φ_1 和 φ_2 作为圆周在横轴上的投影: $\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)=x$, 而同胚 φ_3, φ_4 是在纵轴上的投影: $\varphi_3(x,y)=\varphi_4(x,y)=y$. 为证明映射 $\varphi_k(k=1,\cdots,4)$ 是同胚, 只要把逆映射写为显式的形式即可:

$$\varphi_1^{-1}(x)=(x,\sqrt{1-x^2})\in S^1,\ \varphi_2^{-1}(x)=(x,\ -\sqrt{1-x^2})\in S^1,$$

$$\varphi_3^{-1}(y)=(\sqrt{1-y^2},y)\in S^1,\ \varphi_4^{-1}(y)=(-\sqrt{1-y^2},y)\in S^1,$$

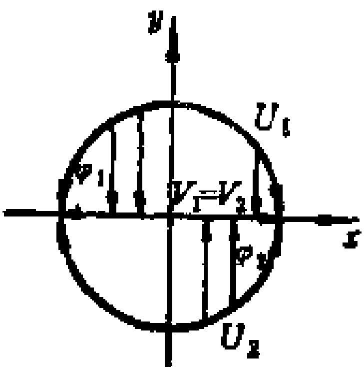


图 1

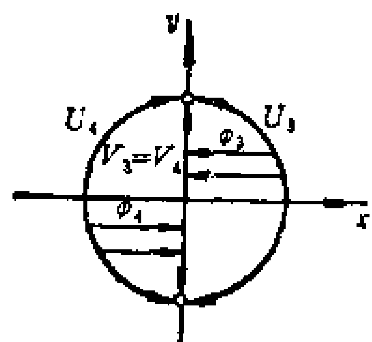


图 2

从而相信, 逆映射是连续的. 那么, 在圆周上得到了四个局部坐标系, 其每一个坐标系都由一个坐标组成: $x_1=\varphi_1(x,y)=x$, $x_2=\varphi_2(x,y)=x$, $x_3=\varphi_3(x,y)=y$, $x_4=\varphi_4(x,y)=y$. 某些点都具备两个局部坐标系. 例如, 对交 $U_1\cap U_3$ 中的点 P 确定了坐标 $x_1(P)$ 和 $x_3(P)$ (图 3). 在圆周上还有其他方法以引进图册. 在第一章中, 我们考察了平面上的极坐标 (r,φ). 在极坐标下, 圆周的方程具有简单的形式: $r=1$. 严格地说, 平面上的极坐标不是坐标系(参看第 1 章). 所以在圆周 S^1 上, 我们引进两个图表: $U_1=\{(x,y)$

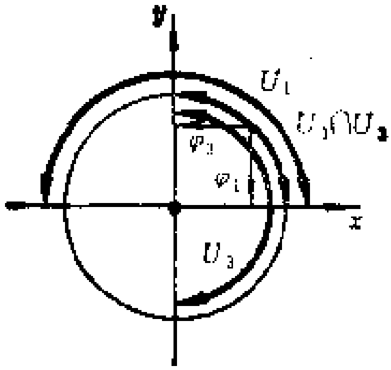


图 3

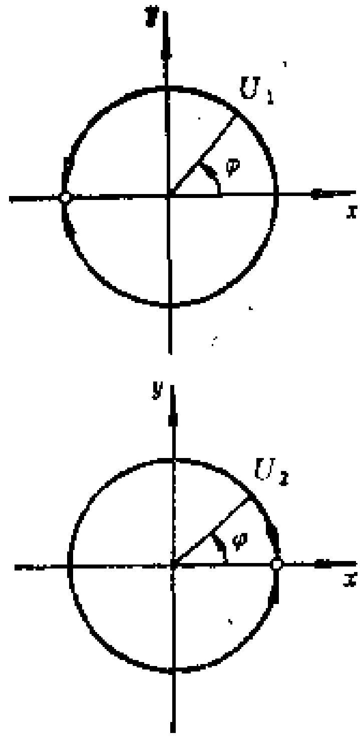


图 4

$\in S^1: x \neq -1\}$, $U_2 = \{(x,y) \in S^1: x \neq 1\}$(图 4). 假设$\varphi_1(P) = \varphi_1(x,y)$等于角$\varphi$的值$\varphi \in (-\pi, \pi)$, 而$\varphi_2(P) = \varphi_2(x,y)$等于角$\varphi$的值: $\varphi \in (0, 2\pi)$, 即$V_1 = (-\pi, \pi)$ $V_2 = (0, 2\pi)$. 很明显, 对上半圆周的点局部坐标$\varphi_1(P)$和$\varphi_2(P)$是一致的, 并且对下半圆周的点局部坐标是不一致的, 即当$y > 0$时, $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y)$; 当$y < 0$时, $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) - 2\pi$(图 5).

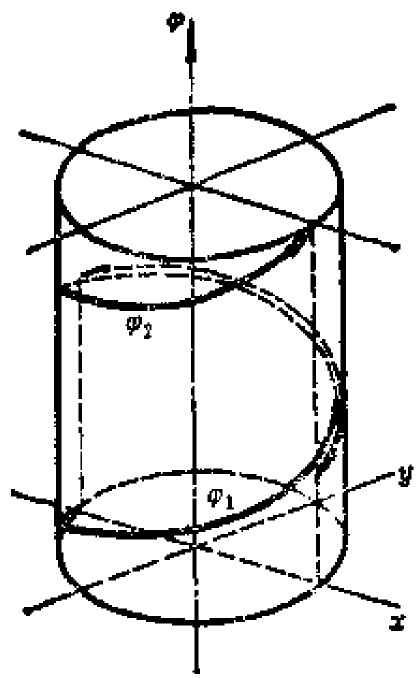


图 5

例 2 在例 1 中考察的圆周 S^1 已是十分复杂的流形了. 最简单的例子是欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 本身. 图册可以仅由一个图 $U = \boldsymbol{R}^n$

组成，坐标同胚 φ 是恒等映射 $\varphi: U\to V=\boldsymbol{R}^n$，局部坐标系是 $\boldsymbol{R}^n$ 中点的笛卡儿坐标．类似地，任何区域 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维流形，其图册也是由一个具有笛卡儿坐标系的图组成．

例 3 设 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^1$ 为连续函数，且 $\Gamma_f\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是它的图形，即形如 $(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1}):x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$ 的点的集合．空间 Γ_f 是具有由一个图 $U=\Gamma_f$ 组成的图册的 n 维流形．坐标同胚 $\varphi: U\to V=\boldsymbol{R}^n$ 定义为沿着最后一个坐标的投影：$\varphi(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})=(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n$．那么逆映射 φ^{-1} 由公式 $\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^n,f(x^1,\cdots,x^n))$ 给出，并且很明显，是连续映射．

例 4 考察 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中满足方程 $(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$ 的点集，它是半径为 1 的 n 维球面 S^n．我们证明，n 维球面是 n 维流形．取开集

$$U_i^+=\{(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\in S^n:x^i>0\},$$
$$U_i^-=\{(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\in S^n:x^i<0\}$$

作为图册．总共获得 $2n+2$ 个开集，它们覆盖了整个球面 S^n．实际上，若对所有的指标 i，点 $P=(x^1,\cdots,x^{n+1})$ 既不属于图 U_i^+，也不属于图 U_i^-，那么这时无论是不等式 $x^i\leqslant 0$，还是不等式 $x^i\geqslant 0$ 都被满足，即 $x^i=0,\ i=1,\cdots,n+1$．于是 $(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=0$，即点 P 不在球面 S^n 上．坐标同胚 φ_i^+ 和 φ_i^- 定义为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 沿着坐标 x^i 的投影．那么区域 V_i^+ 与 V_i^- 相互重合，并且等于单位半径的球，而坐标同胚由公式

$$\varphi_i^+(x^1,\cdots,x^{n+1})=\varphi_i^-(x^1,\cdots,x^{n+1})$$
$$=(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^n$$

给出．逆同胚由公式

$$(\varphi_i^+)^{-1}(y^1,\cdots,y^n)=(y^1,\cdots,y^{i-1},\sqrt{1-(y^1)^2-\cdots-(y^n)^2},$$
$$y^{i+1},\cdots,y^n)\in\boldsymbol{R}^{n+1},$$
$$(\varphi_i^-)^{-1}(y^1,\cdots,y^n)=(y^1,\cdots,y^{i-1},-\sqrt{1-(y^1)^2-\cdots-(y^n)^2},$$

$y^{i+1},\cdots y^n)\in \boldsymbol{R}^{n+1}$

定义，并且很明显是连续的.

例 5 我们考察射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$. 我们把它表示为这样的空间，$\boldsymbol{R}^3$ 中过坐标原点的所有直线被宣布为空间中的点. 我们定义两直线间的距离为它们之间的较小的角. 于是 $\boldsymbol{RP}^2$ 变成度量空间. 我们证明，$\boldsymbol{RP}^2$ 是 2 维的流形. 为此，给每一直线 $P\in\boldsymbol{RP}^2$ 以三个齐次坐标 $(x:y:z)$ ($(\lambda x:\lambda y:\lambda z)$ $(\lambda\neq 0)$ 表示同一直线 $P\in\boldsymbol{RP}^2$) 是方便的. 齐次坐标不同时为 0，即 $x^2+y^2+z^2>0$. 我们用三个图来覆盖 $\boldsymbol{RP}^2$: $U_1=\{(x:y:z):x\neq 0\}$，$U_2=\{(x:y:z):y\neq 0\}$，$U_3=\{(x:y:z):z\neq 0\}$. 设 $V_1=V_2=V_3=\boldsymbol{R}^2$. 取下面的映射作为坐标同胚：$\varphi_k:U_k\to V_k=\boldsymbol{R}^2$: $\varphi_1(x:y:z)=(y/x,z/x)$，$\varphi_2(x:y:z)=(x/y,z/y)$，$\varphi_3(x:y:z)=(x/z,y/z)$. 于是作出了三个局部坐标系：

$$x_1^1=y/x,x_1^2=z/x;x_2^1=x/y,x_2^2=z/y;x_3^1=x/z,x_3^2=y/z.$$

为验证映射 φ_k 是同胚，作出逆映射：

$$\varphi_1^{-1}(x_1^1,x_1^2)=(1:x_1^1:x_1^2),\varphi_2^{-1}(x_2^1,x_2^2)=(x_2^1:1:x_2^2),$$

$$\varphi_3^{-1}(x_3^1,x_3^2)=(x_3^1:x_3^2:1),$$

并且确信它们是连续的.

我们考察过的例子表明了在同一个流形 M 上可以建立不同的图册. 甚至若保留作为开集的图不变，还可以用选择另外坐标同胚的方法来改变图中的局部坐标系. 特别，有下面的引理 1.

引理 1 设 M 是 n 维流形，U 是它的某个图，具有坐标同胚 φ 和局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$. 若 $U'\subset U$ 是 U 的开子集，则在 U' 上也能定义坐标同胚 φ' 和局部坐标 $(y^1,\cdots,y^n)$，而且对 $P\in U'$，有 $\varphi'(P)=\varphi(P)$，$y^k(P)=x^k(P)$.

证明 由于同胚 $\varphi:U\to V$ 同胚地映射任何开子集 $U'\subset U$. 由此可得引理 1. 所以取同胚 φ 在子集 U' 上的限制作为 φ'，而取

坐标函数 x^k 在同一个子集 U' 上的限制作为 y^k 即可.

引理 1 指出,由给定的图册 $\{U_i\}$, 可以作出新的更细的图册. 另一方面, 若给出两个图册 $\{U_i\}$ 和 $\{U'_j\}$, 那么这两个图册的并仍是流形的图册. 所以存在由给定流形的所有图组成的**最大图册**. 最大图册可以看作流形上所有图册的并.

下面的引理 2 在以后是有用的.

引理 2 设 $\{U_i\}$, $\{U'_j\}$ 是流形 M 上的两个图册. 则存在第三个图册,它将 $\{U_i\}$ 和 $\{U'_j\}$ 两者都分细.

为证明此引理,假设 $W_{ij}=U_i\cap U'_j$. 根据引理 1, 在每一个开集 W_{ij} 上可以引进局部坐标系. 另一方面 $W_{ij}\subset U_i$, $W_{ij}\subset U'_j$, 并且集合系 $\{W_{ij}\}$ 覆盖流形 M. 这就是说: 系 $\{W_{ij}\}$ 是第三个图册, 它将两个图册 $\{U_i\}$ 和 $\{U'_j\}$ 都分细.

2. 坐标变换函数 光滑流形的定义

从任意度量空间(或一般情形, 拓扑空间)中分出流形来是非常有益的. 例如,定义在 n 维流形 M 上各个连续函数 $f: M\to R^1$, 在每一点 $P\in M$ 的邻域中可以与 n 个实的独立变数 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的通常的实连续函数 $h(x^1, \cdots, x^n)$ 等同, 而且函数 h 是在欧氏空间 R^n 的某个区域中定义的. 事实上,设 U 是包含点 P 的图, $\varphi: U\to V\subset R^n$ 是它的坐标同胚, $(x^1(P), \cdots, x^n(P))$ 是图 U 中的局部坐标系. 若 $\vec{x}=(x^1, \cdots, x^n)$ 是具有坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的向量, 那么我们就令 $h(x^1, \cdots, x^n)=f(\varphi^{-1}(\vec{x}))$. 相反地,若 h 是在区域 $V\subset R^n$ 中给出的 n 个实变数的连续函数, 那么定义在流形 M 的开集 U 中的连续函数 $f(P)=h(x^1(P), \cdots, x^n(P))$ 与它相对应.

更一般的情形是,设 $f: M_1\to M_2$ 是 n 维流形 M_1 到 m 维流形 M_2 中的连续映射. 并设 $Q_0=f(P_0)$, $P_0\in M_1$, $Q_0\in M_2$. 于是在某个很小的邻域 $U\ni P_0$ 中, 映射可以与 n 个自变量的连续的向量函

数 h 等同. 事实上,设 $U'\ni Q_0$ 是流形 M_2 的某个图,$(y^1,\cdots,y^m)$ 是局部坐标系. 因为映射 f 是连续的, 所以根据引理 1 可以找到点 P_0 的邻域 U, 使 $f(U)\subset U'$. 设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是图 U 中的局部坐标系. 因为图 U 的点 P 与它的坐标组 $(x^1(P),\cdots,x^n(P))$ 一一对应,而 U' 的点 Q 与它的坐标组 $(y^1(Q),\cdots,y^m(Q))$ 一一对应,所以等式 $Q=f(P)$ 表示

$$y^k(Q)=y^k(f(P))=y^k(h(x^1(P),\cdots,x^n(P)))$$
$$=h^k(x^1(P),\cdots,x^n(P)).$$

函数 $\{h^k(x^1,\cdots,x^n)\}$ 是连续函数, 它们在图 U 中唯一确定映射 f.

于是,在流形 M 上的每一个连续函数 f, 在局部坐标系中可表示为 n 个自变量的实值函数 h. 若我们变换局部坐标系, 那么函数 h 也改变. 要问,在坐标变换下,函数 h 按什么规律变化? 设 $(x^1,\cdots,x^n)$, $(y^1,\cdots,y^n)$ 是两个局部坐标系. 不失一般性, 可以认为两个局部坐标系定义在一个图 U 中. 设 h 和 h' 分别是坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $(y^1,\cdots,y^n)$ 的函数,它们都表示函数 f. 于是

$$f(P)=h(x^1(P),\cdots,x^n(P))=h'(y^1(P),\cdots,y^n(P)). \tag{1}$$

因为坐标 $y^1,\cdots,y^n$ 也是图 U 中的一些连续函数,所以它们也表示为 n 个独立变量 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的函数,即

$$\begin{aligned} y^1(P)&=y^1(x^1(P),\cdots,x^n(P)),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n(P)&=y^n(x^1(P),\cdots,x^n(P)). \end{aligned} \tag{2}$$

在这些公式中,无论是点 P 的坐标,或是它作为变量 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的函数的表达式 $y^k=y^k(x^1,\cdots,x^n)$, 我们都试图用同一种记号 y^k 来表示. 于是由公式(1)我们得到恒等式:

$$h(x^1,\cdots,x^n)=h'(y^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^n(x^1,\cdots,x^n)). \tag{3}$$

在关系式(2)右边部分的函数 $y^k=y^k(x^1,\cdots,x^n)$, 当集合 U 是欧氏空间中的区域时, 第一章中已称为坐标变换函数. 我们对流形的

情形仍保留这个术语.

定义 1 设 M 是 n 维流形，$\{U_i\}$是它的图册，φ_i 是坐标同胚，$\{x_i^k\}$是一组局部坐标系. 在两个图的每一个交 $U_{ij}=U_i\cap U_j$ 中，定义了两个局部坐标系$\{x_i^k\}$和$\{x_j^k\}$，而且 $x_i^k(P)=x_i^k(x_j^1(P),\cdots,x_j^n(P))$，$P\in U_{ij}$. 函数 $x_i^k=x_i^k(x_j^1,\cdots,x_j^n)$称为**坐标变换函数**或称为把坐标$\{x_i^k\}$变为坐标$\{x_j^k\}$的**转换函数**.

坐标变换函数不是定义在整个区域 V_j 中，而是定义在它的某一部分 $V_{ij}=\varphi_j(U_{ij})$ 中凡是说及两个坐标系是有意义的地方.

为方便起见，在图 6 中，欧氏空间的区域 V_i 和 V_j 是作为不相交的集合画出的.

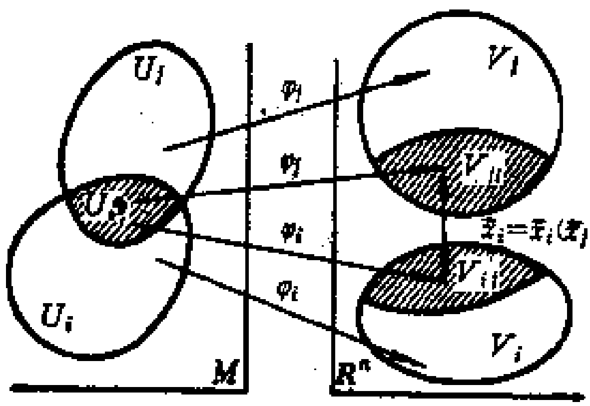


图 6

坐标变换函数 $x_i^k=x_i^k(x_j^1,\cdots,x_j^n)$实现了 R^n 中的区域 V_{ji} 到区域 V_{ij} 的联列映射：

$$\begin{aligned}\bar{x}_i&=\{x_i^k(x_j^1,\cdots,x_j^n)\}=\{x_i^k(\bar{x}_j)\}=\bar{x}_i(\bar{x}_j)\\&=\varphi_i\varphi_j^{-1}(\bar{x}_j)=\varphi_{ij}(\bar{x}_j).\end{aligned}\tag{4}$$

公式(4)给出的映射 $\varphi_{ij}:V_{ji}\to V_{ij}$，正好是转换函数的另外表示法，也是区域 V_{ji} 到区域 V_{ij} 上的同胚.

注意，若 $i=j$，则 $U_{ij}=U_i$，$V_{ij}=V_{ji}=V_i$，而 $x_i^k(x_j^1,\cdots,x_j^n)\equiv x_j^k$. 现在回到定义在 n 维流形 M 上的连续函数 f 的表示上来，即

把 f 表示为依赖于 n 个自变量（流形的点的局部坐标）的函数 h. 由数学分析教程中知道，研究更窄的一类函数——可微函数是有用的. 我们把这个重要的概念移到在流形上给定的函数上来. 若函数 $h(x^1,\cdots,x^n)$ 是连续可微的函数，那末，我们不能说，在另一个局部坐标系 $(y^1,\cdots,y^n)$ 中表示同一函数 f 的函数 $h'(y^1,\cdots,y^n)$ 也是连续可微的函数. 事实上，函数 h 和 h' 由关系式(3)相联系. 因此，为使函数 h' 也是连续可微的，要求坐标变换函数 $x^k=x^k(y^1,\cdots,y^n)$ 是连续可微的就足够了. 若坐标变换函数不是连续可微的函数，那么存在函数 f，它在坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 下的表示式 h 是连续可微的函数，而它在坐标 $(y^1,\cdots,y^n)$ 下的表示式 h' 将不满足这个条件. 我们取函数 $f(P)=x^k(P)$，$P\in U\subset M$，作为函数 f 的例子. 此时 $h(x^1,\cdots,x^n)\equiv x^k$，很明显，这是连续可微的函数. 但是 $h'(y^1,\cdots,y^n)=x^k(y^1,\cdots,y^n)$ 已不具有这个性质.

于是我们得出下面的定义.

定义 2 n 维流形 M，其图册 $\{U_i\}$ 的局部坐标系 $\{x_i^j\}$ 满足条件：对任何一对图 U_i,U_j，坐标变换函数 $x_i^k=x_i^k(x_j^1,\cdots,x_j^n)$ 在它们的整个定义区域中是连续可微的函数. 则称流形 M 是 **n 维光滑流形**.

光滑流形的定义给出从流形 M 上的所有函数中分出一类连续可微函数的可能性.

定义 3 定义在光滑流形 M 上的函数 $f:M\to\mathbf{R}^1$，若在任何局部坐标系 $(x_i^1,\cdots,x_i^n)$（图 $U_i\ni P_0$ 属于所建立的图册中）中，函数 f 在点 $(x_i^1(P_0),\cdots,x_i^n(P_0))$ 的邻域中表示为 n 个独立变量的连续可微的函数 $h(x_i^1,\cdots,x_i^n)$. 则称函数 $f:M\to\mathbf{R}^1$ 为在点 $P_0\in M$ **是连续可微的**.

注意，在定义 2 中对坐标变换函数的连续可微性要求，对在光滑流形 M 上连续可微函数 f 的定义 3 来讲是实质性的. 如上面我

们已经指出的那样，假如坐标变换函数不满足连续可微性条件，那么函数 f 在点 $P_0\in M$ 的连续可微性条件就依赖于包含点 P_0 的图 U_i 的选择.

例 5 我们考察下面的流形M上的图册的例子. 设$M=\mathbf{R}^1$是实直线，图册由两个同样的图 $U_1=U_2=M=\mathbf{R}^1$ 组成，但是具有不同的坐标系. 在 U_1 上给出坐标 $x_1=x, x\in\mathbf{R}^1$，而在 U_2 上用公式 $x_2=(x)^3$ 给出坐标. 那么坐标变换函数为

$$x_2=x_2(x_1)=(x_1)^3, \tag{5}$$

$$x_1=x_1(x_2)=\sqrt[3]{x_2}. \tag{6}$$

若坐标变换函数(5)是连续可微的函数(多项式)，那么函数(6)具有不连续的导数. 所以按照定义 2，具有图册$\{U_1, U_2\}$的流形M不是光滑流形.

注 若流形M上的图册由一个图(即当M同胚于欧氏空间中的区域时)组成，则M是光滑流形.

定义 4 在流形M上给出两个图册$\{U_i\}$和$\{U'_j\}$，并且关于其中每一个图册，M都是光滑流形. 若由图册 $\{U_i\}$ 中的每一个局部坐标系到图册$\{U'_j\}$中的任何一个局部坐标系的转换函数都是连续可微的函数. 则称两个图册$\{U_i\}$和$\{U'_j\}$是等价的.

下面事实说明定义 4 是合理的. 在流形M上定义的任何函数在图册$\{U_i\}$中是连续可微的，当且仅当它在图册$\{U'_j\}$中是连续可微的. 于是，从在流形M上连续可微的函数的观点来看，等价的图册是平等的，并且对于把函数表示为独立变数(点的坐标)的连续可微的实值函数来讲，可以利用等价的图册中任何一个图册. 可能有定义 4 的另外的叙述：设$\{U_i\}$和$\{U'_j\}$是流形M上的两个图册，若M关于新的图册$\{U_i\}\cup\{U'_j\}$(等于原来的两个图册的并)是光滑流形，则两个图册$\{U_i\}$和$\{U'_j\}$是等价的.

要求考察更窄的一类函数完全是常有的事. 我们提醒一下，

若在点$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$的邻域中实值函数$h(x^1, \cdots, x^n)$的直到r阶(包括r阶)的所有偏导数存在并且连续，则函数h在这点的邻域中是$C^r(r=1,2,\cdots,\infty)$类光滑的函数. $r=\infty$的情形，是指函数h的所有阶偏导数存在并且连续. 与此相应，我们也在流形的图册上加上条件，叙述为下面的定义.

定义 2′ 对建立了图册$\{U_i\}$的流形M，若所有的坐标变换函数在其定义域中的所有的点是$C^r(r=1,2,\cdots,\infty)$类光滑函数，则称流形M是$C^r(r=1,2,\cdots,\infty)$**类光滑流形**.

定义 3′ 设M是C^r类光滑流形，并且f是流形M上的连续函数. 若f的任何表示为依赖于局部坐标$(x^1, \cdots, x^n)$(是所建立的图册中的一个图的坐标)的函数h在点$(x^1(P_0), \cdots, x^n(P_0))$的邻域中是$C^s(s\leqslant r)$类光滑函数，则称此函数$f$为在点$P_0\in M$的邻域中是$C^s$类光滑函数. 函数$f$若在它的定义域的每一点$P_0$的邻域中都是$C^s$类光滑函数，则简单地称$f$是$C^s$**类光滑函数**.

例 6 我们使例5改变样子. 在第二个图U_2中取坐标$x_2=x+x\cdot|x|$. 于是流形是C^1类光滑流形，但不是C^2类光滑流形.

注 以后若无相反的声明，我们仅考察C^∞类光滑流形，而在流形上的函数是C^∞类光滑函数.

在例1—4中，我们所考察的带有图册的流形自然都是C^∞类光滑流形.

在几何中还考虑给图册及其坐标变换函数以另外更强的条件. 例如，若所有的坐标函数是实解析函数，即在它有定义的每一点的邻域中能展为收敛的泰勒级数，则此流形称为**实解析流形**. 实解析流形是C^∞类光滑流形.

比较重要的一类流形是复解析流形. 设M是$2n$维流形，$\{U_j\}$是它的图册，$\varphi_j: U_j\to V_j\subset R^{2n}$是它的坐标同胚. 使$2n$维欧氏空间$R^{2n}$与$n$维复线性空间$C^n$等同，即认为点$(z^1, \cdots, z^n)$的复坐

标给出了 $2n$ 个实坐标 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$，$z^k=x^k+iy^k$. 那么在图 U_j 中的 $2n$ 个坐标函数 $x_j^1(P),\cdots,x_j^n(P),y_j^1(P),\cdots,y_j^n(P)$ 化为 n 个复值函数 $z_j^k=x_j^k(P)+iy_j^k(P)$. 我们称函数 $z_j^k(P)$ 为在图 U_j 中点的复坐标. 在两个图的交 $U_j\cap U_l$ 中，我们有从一个坐标系到另一个的转换函数：

$$
\begin{aligned}
&x_j^1=x_j^1(x_l^1,\cdots,x_l^n,y_l^1,\cdots,y_l^n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_j^n=x_j^n(x_l^1,\cdots,x_l^n,y_l^1,\cdots,y_l^n),\\
&y_j^1=y_j^1(x_l^1,\cdots,x_l^n,y_l^1,\cdots,y_l^n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_j^n=y_j^n(x_l^1,\cdots,x_l^n,y_l^1,\cdots,y_l^n).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

函数(7)可以表示为 n 个独立的复变量的复值函数：

$$
\begin{aligned}
&z_j^1=z_j^1(z_l^1,\cdots,z_l^n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_j^n=z_j^n(z_l^1,\cdots,z_l^n).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

我们称函数(8)为复坐标转换函数或复坐标变换函数.

建立了图册 $\{U_j\}$ 和局部复坐标系 $(z_j^1,\cdots,z_j^n)$ 的流形 M，若所有的复坐标变换函数(8)是复解析函数，即在它定义域的每一点的邻域中能展开为复变数的收敛泰勒级数，则称 M 为**复解析流形**.

我们考察二维球面 S^2，并在其上专门构造一套图册，作为容许有复解析流形结构的流形的例子. 在第一章中已作出了球面 $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ 从北极 $P_0=(0,0,1)$ 到坐标平面 (x,y) 的球极射影. 我们用 φ_0 表示这个映射. 映射 φ_0 把球面 S^2 上除极点 P_0 以外的所有点，即开集 $U_0=S^2\backslash(P_0)$ 同胚地映射到整个平面 $V_0=\mathbf{R}^2$. 在笛卡儿坐标下，同胚 φ_0 为：$\varphi_0(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$. 所

以在图 U_0 中引进一个用球面上点的笛卡儿坐标表示的复坐标 $w_0=\frac{x+iy}{1-z}$. 此外，考察南极 $P_1=(0,0,-1)$ 和从南极到同一个坐标平面 (x,y) 的球极射影 φ_1. 映射 φ_1 同胚地把集合 $U_1=S^2\setminus(P_1)$ 映射到整个平面 $V_1=\boldsymbol{R}^2$. 在笛卡儿坐标下，映射 φ_1 为：$\varphi_1(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$. 我们在图 U_1 中引进复坐标 $w_1=\frac{x-iy}{1+z}$. 那么在交 $U_0\cap U_1$ 中得到：

$$w_0w_1=\frac{x^2+y^2}{1-z^2}\equiv 1.$$

于是，
$$w_0=w_0(w_1)=\frac{1}{w_1},\quad w_1=w_1(w_0)=\frac{1}{w_0}. \tag{9}$$

函数(9)是复值函数. 就是说球面 S^2 是复解析流形. 每一个图 U_0 或 U_1 都覆盖了除一点外的整个球面 S^2，并且借助于坐标的同胚 φ_0 或 φ_1 恒同于复平面 $\mathbf{C}^1=\boldsymbol{R}^2$. 所以通常把球面 S^2 和所谓扩充复平面看成一样，这里的扩充复平面由 $\mathbf{C}^1$ 再增加一个"无穷远"点而获得.

任意的光滑流形不一定是复解析流形. 例如，若它的维数为奇数，则出于平常的考虑，这样的流形不是复解析流形. 但是，在偶数维数流形的情况，也有这样的例子，它不容许有复解析流形的结构. 例如，射影平面不是复解析流形(在第四章 §6 中证明).

3. 光滑流形　微分同胚

设 M_1 和 M_2 是两个光滑流形，$f: M_1\to M_2$ 是连续映射. 我们曾经指出，在任何点 $P_0\in M_1$ 的邻域中，映射 f 可以表示为向量函数 h, $y^k=h^k(x^1,\cdots,x^n)$，其中 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是在点 $P_0\in M_1$ 的邻域中的局部坐标系，而 $(y^1,\cdots,y^m)$ 是在点 $Q_0=f(P_0)\in M_2$ 的邻域中的局部坐标系，

定义 5 光滑流形的映射 $f: M_1 \to M_2$，若对任意点 $P_0 \in M_1$ 的邻域中的任何局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 和点 $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ 的邻域中的任何局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^m)$，函数 f 的向量函数表示式 $\vec{y} = (y^k) = (h^k(x^1, \cdots, x^n)) = h(\vec{x})$ 是 $C^r(r = 1, 2, \cdots, \infty)$ 类光滑的向量函数，则称映射 f 为 **C^r 类光滑映射**.

注意，C^r 类光滑映射的定义仅在流形 M_1 与 M_2 的光滑类数不小于 r 时才有意义.

设 $f: M_1 \to M_2$ 是流形的同胚. 若 f 是 C^r 类光滑映射，那么逆映射 f^{-1} 不一定是光滑映射. 若逆映射 $f^{-1}: M_2 \to M_1$ 也是 C^r 类光滑映射，则同胚 f 称为 **C^r 类光滑同胚**或 **C^r 类微分同胚**. 光滑流形间的微分同胚起着与拓扑空间中的同胚相同的作用. 若 $f: M_1 \to M_2$ 是微分同胚，则流形 M_1 和 M_2 称为微分同胚的流形. 所有流形的总和分成不相交的类，每一类中是两两地微分同胚的流形. 光滑流形，流形上的光滑函数或映射的每个共同的性质都能转移到任何与它微分同胚的流形上去. 所以我们通常对微分同胚的各流形将不加区别.

但是存在流形的这样的一些性质，这些性质对于一对微分同胚的流形"为相同的"不是十分明显的. 特别，我们对每个流形赋予一数字特征，即流形的维数. 微分同胚的流形有同样的维数吗？

定理 1 设 $f: M_1 \to M_2$ 是光滑流形的 C^r 类光滑同胚，则 $\dim M_1 = \dim M_2$.

证明 设 $P_0 \in M_1$ 是任意点，$Q_0 = f(P_0)$，$g = f^{-1}$ 是逆映射. 取点 P_0 的邻域 U_0 中的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 和点 Q_0 的邻域 V_0 中的局部坐标 $(y^1, \cdots, y^m)$. 则映射 f 和 g 表示为两个向量函数 $\vec{y} = h(\vec{x})$ 和 $\vec{x} = h^{-1}(\vec{y})$，且 $h^{-1}(h(\vec{x})) \equiv \vec{x}$，$h(h^{-1}(\vec{y})) \equiv \vec{y}$. 我们考查 h 和 h^{-1}. 映射 h 由 n 个独立变量 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的 m 个函数 $y^i = h^i(x^1, \cdots,$

x^n)组成. 用函数 h^i 的所有偏导数构造矩阵:

$$dh=\begin{pmatrix}\frac{\partial h^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial h^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h^m}{\partial x^n}\end{pmatrix}.$$

矩阵 dh 是$(m\times n)$阶的长方矩阵,即有 m 行和 n 列. 矩阵 dh 称为映射 h 的 Jacobi 矩阵.

引理 3 设 $U_0\subset \boldsymbol{R}^n, V_0\subset \boldsymbol{R}^m, W_0\subset \boldsymbol{R}^k$ 是欧氏空间的开区域, $f: U_0\to V_0, g: V_0\to W_0$ 是连续可微的映射, $h: U_0\to W_0$ 是映射 f 和 g 的合成, 即 $h(P)=g(f(P))$. 则映射 f, g, h 的 Jacobi 矩阵满足关系式: $dh(P)=dg(f(P))\cdot df(P), P\in U_0$. 换句话说, 合成 $h=g\cdot f$ 的 Jacobi 矩阵等于映射 g 和 f 的 Jacobi 矩阵的乘积.

证明 用直接微分复合函数来进行引理的证明. 设$(x^1,\cdots,x^n)$, $(y^1,\cdots,y^m)$, $(z^1,\cdots,z^k)$是区域 U_0, V_0, W_0 中的笛卡儿坐标. 于是

$$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^n), z^j=g^j(y^1,\cdots,y^m),$$

$$z^j=h^j(x^1,\cdots,x^n)=g^j(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,f^m(x^1,\cdots,x^n)).$$

然后, 关于变量 x^i 微分函数 h^j, 有:

$$\frac{\partial h^j}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g^j}{\partial y^l}(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots)\frac{\partial f^l}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^n). \tag{10}$$

公式(10)丝毫不差地与两个矩阵乘积的一般元素的表示式一致, 即 $dh(x^1,\cdots,x^n)=dg(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots)\cdot df(x^1,\cdots,x^n)$. 若点 P 具有坐标$(x^1,\cdots,x^n)$, 那么前面的等式简写为 $dh(P)=dg(f(P))\cdot df(P)$. 引理证完.

应用引理 3 于一对映射 h 和 h^{-1} 上, 设 e_0 是 h 和 h^{-1} 的合成映射, e_1 是 h^{-1} 和 h 的合成映射, 即 $e_0(Q)=h(h^{-1}(Q))$, $Q\in V_0$,

$e_1(P)=h^{-1}(h(P)), P\in U_0$.

两个映射 $e_0:V_0\to V_0$ 和 $e_1:U_0\to U_0$ 都是恒等映射. 于是,映射 e_0 和 e_1 的 Jacobi 矩阵分别是 m 阶和 n 阶的单位矩阵. 特别, $\text{rank}\,de_0=m$, $\text{rank}\,de_1=n$. 另一方面,应用引理 3,得到:

$$de_0(Q)=dh(h^{-1}(Q))\cdot dh^{-1}(Q), Q\in V_0,$$

$$de_1(P)=dh^{-1}(h(P))\cdot dh(P), \quad P\in U_0.$$

从线性代数知道,两个矩阵乘积的秩不超过每一个因子的秩. 因为 $\text{rank}\,dh\leqslant\min(m,n)$, $\text{rank}\,dh^{-1}\leqslant\min(m, n)$ (矩阵 dh 和 dh^{-1} 是长方形矩阵!),所以 $\text{rank}\,de_0\leqslant\min(m,n)$, $\text{rank}\,de_1\leqslant\min(m,n)$. 于是 $m\leqslant\min(m,n)$, $n\leqslant\min(m,n)$, 或 $\text{mas}(m,n)\leqslant\min(m,n)$,这就是说, $m=n$. 定理 1 证完.

不仅对光滑流形有维数的概念,而且对任意流形也有维数的概念. 所以产生了自然的问题: 同胚流形的维数是一样的吗? 回答是肯定的, 即, 若 M_1 和 M_2 是两个同胚流形, 那么 $\dim M_1=\dim M_2$. 这个结论是一般拓扑学的很深的定理, 而它却是我们教程范围以外的内容。

最后, 我们证明几个关于图册结构的几个有用的附注. 根据定义, 在流形M上的图册由同胚于区域 $V_i\subset\mathbf{R}^n$ 的开集 U_i 组成. 若M是光滑流形, 那么坐标的同胚 $\varphi_i:U_i\to V_i$ 是光滑的同胚. 有时, 依靠增加图册中的图的数目, 使欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中区域 V_i 的形式简化,这确实常常是有用的.

引理 4 在光滑流形M中存在这样的图册$\{U_i\}$, 其每一个图 U_i 都与 $\mathbf{R}^n$ 微分同胚。

证明 首先证明可以作出这样的图册,其每一个图都与 $\mathbf{R}^n$ 中某个半径为 ε 的开球微分同胚. 设 $P_0\in M$ 是任意点, $U_i\ni P_0$, $\varphi_i: U_i\to V_i\subset\mathbf{R}^n$ 是坐标同胚, $Q_0=\varphi_i(P_0)$. 因为 V_i 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, 所以存在这样的数 ε, 使中心在点 Q_0, 半径为 ε 的开球包含在 V_i

中，用 $O_\varepsilon(Q_0)$ 表示这个开球，而用 W_P 表示它的原象 $\varphi_i^{-1}(O_\varepsilon(Q_0))$。开集族 $\{W_P\}$ 是流形 M 上的图册，并且每一个图 W_P 与 $\boldsymbol{R}^n$ 的开球微分同胚. 我们证明半径是 ε 的开球与 $\boldsymbol{R}^n$ 微分同胚，以此来完成引理的证明. 考虑 $\varepsilon=1$ 的情形就够了. 于是，设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是半径为 1 的球中的点，$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2<1$. 设

$$y^k=\frac{x^k}{\sqrt{1-(x^1)^2-\cdots-(x^n)^2}},\tag{11}$$

$$x^k=\frac{y^k}{\sqrt{1+(y^1)^2+\cdots+(y^n)^2}}.\tag{12}$$

函数(11)和(12)是光滑的函数，并且也是实现半径为 1 的球到 $\boldsymbol{R}^n$ 的互逆的映射。

引理 5　设 M 是光滑的紧致流形，$\{U_i\}$ 是其图册. 则存在附属于覆盖 $\{U_i\}$ 的 1 的光滑分解 ψ_i.

证明　根据引理 4 可认为所有的图都与半径为 1 的球同胚. 设 $\varphi_i: U_i\to D_1^n\subset\boldsymbol{R}^n$ 是坐标同胚①. 取这样的足够小的 $\varepsilon>0$，使 $\{\varphi_i^{-1}(D^n_{(1-\varepsilon)})\}$ 覆盖流形 M. 假设存在球 D_1^n 上的 C^∞ 类函数 f，使 $\operatorname{supp}f=D^n_{(1-\varepsilon)}$，$0\leqslant f\leqslant 1$. 设

$$\bar\psi_i(P)=\begin{cases}0, & P\overline{\in}U_i,\\ f(\varphi_i(P)), & P\in U_i.\end{cases}$$

因为当 $P\overline{\in}\varphi_i^{-1}(D^n_{(1-\varepsilon)})$ 时，$f(\varphi_i(P))=0$，所以函数 $\bar\psi_i$ 在流形 M 上是光滑函数，而且 $\operatorname{supp}\bar\psi_i\subset U_i$，$0\leqslant\bar\psi_i\leqslant 1$. 此外还有 $\operatorname{supp}\bar\psi_i\supset\varphi_i^{-1}(D^n_{(1-\varepsilon)})$. 于是，函数 $\bar\psi_i$ 的和 $\bar\psi(P)=\sum\limits_i\bar\psi_i(P)$ 在每一点都严格地大于 0. 这时我们设 $\psi_i(P)=\bar\psi_i(P)/\bar\psi(P)$. 函数 $\psi_i(P)$ 组成了附属于覆盖 $\{U_i\}$ 的 1 的光滑分解.

于是，就剩下构造 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 C^∞ 类函数 f，使它的支集等于球

①这里 D_r^n 表示中心在坐标原点半径为 r 的开球.

$D^n_{(1-e)}$. 我们将寻找形式为 $f(x^1,\cdots,x^n)=h((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2)$ 的函数 f. 于是作出单变量的光滑函数 $h(x)$，使当 $x>(1-e)^2$ 时，$h(x)=0$；当 $x<(1-e)^2$ 时，$h(x)>0$ 就足够了. 取函数

$$h(x)=\begin{cases}e^{-1}/(x-(1-e)^2)^2, x<(1-e)^2,\\ 0, e^{-1/(x-(1-e)^2)^2}x\geqslant(1-e)^2\end{cases}$$

作为所要求的函数 h，这函数已知是 C^∞ 类光滑函数. 引理 5 证完.

§1 习　　题

1. 证明：平面上刚性线段在平面中的位置空间是光滑流形.
2. 证明：群 $SO(3)$ 同胚于三维射影空间.
3. 描绘三维空间中两个用铰链联结的杆子所组成的系统的构形空间.
4. 举出光滑的，双方单值的映射，但不是微分同胚的例子.
5. 证明：在球面 S^n 上不存在由一个图组成的图册.

§2　用方程给出流形

描述和构造实用中常见的流形有标准的方法.

在前面几节中(第一章中也有)，流形的许多例子是作为欧氏空间的某个非线性方程的解的集合出现的. 例如，n 维球面 S^n 由欧氏空间 R^{n+1} 中的方程 $(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$ 给出；伪球面 S^2_1 由方程 $x^2+y^2-z^2=-1$ 给出. 一般地，若 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 是连续可微的函数，则方程 $f(x^1,\cdots,x^n)-c=0$ 解的集合称为**函数 f 的 c 等高线流形**. 于是，整个欧氏空间 R^n 分解为函数 f 的等高线流形的并. 在两个变量的函数情形，方程的解通常称为函数 f 的**曲线**. 而在三个变量的函数情形，则为**等高曲面**.

为说明名称"函数 f 的等高线流形"是正确的，必须证明函数 f 的等高线流形确实是流形. 但是，实际上不总是如此.

例 1　考察函数 $f(x,y)=x^2-y^2$. 它的等高曲线由方程 x^2-y^2

$=c$ 描述．若 $c>0$，则等高曲线由两个连通分支组成，其中每一个分别由方程 $x=\sqrt{c+y^2}$，$x=-\sqrt{c+y^2}$ 中的一个描述，即它们是单变量函数的图形（图7）．类似地，当 $c<0$ 时，等高曲线由两个函数 $y=\sqrt{x^2-c}$，$y=-\sqrt{x^2-c}$ 的图形组成．于是在 $c\neq 0$ 时，等高曲线是一维流形（参看§1，例3）．在 $c=0$ 时的等高曲线表示特别的情形．在这种情况下，等高曲线由一对相交直线 $y=x$，$y=-x$ 组成，并且不是一个流形．

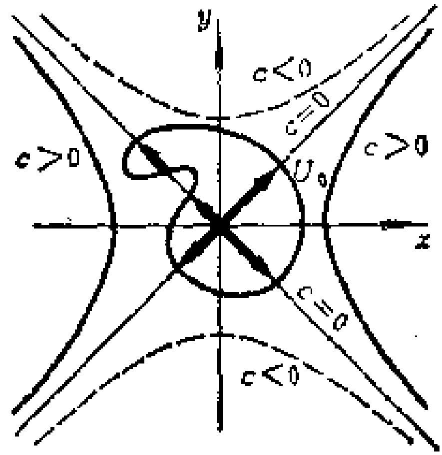


图 7

实际上，等高曲线 $f=0$ 上的点 $P_0=(0,0)$ 没有同胚于欧氏空间某区域的邻域 U_0．如果这样的同胚 $\varphi_0: U_0\to V_0\subset \mathbf{R}^1$ 存在，那么不失一般性，可以认为 V_0 是开区间，而 U_0 包含了到 P_0 的距离小于某个 ε 的所有的点 P．于是 $U_0\setminus(P_0)$ 至少有四个连通分支，而它的同胚象 $V_0\setminus(\varphi_0(P_0))$ 总共只有两个连通分支．这个矛盾证明了对 $\mathbf{R}^1$ 的同胚 φ_0 是不存在的．类似地，对区域 $V_0\subset\mathbf{R}^n$，$n\geqslant 2$，同胚 φ_0 也不存在．

虽然如此，在某种意义下，连续可微的函数 f 的等高线流形几乎都是流形．

定理1 设 $f=f(x^1,\cdots,x^n)$ 是定义在整个欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 C^∞ 类函数．设 $M_c=\{(x^1,\cdots,x^n): f(x^1,\cdots,x^n)=c\}$．若函数 f 的梯度在集合 M_c 的每一点不等于零，则 M_c 是 C^∞ 类的 $(n-1)$ 维光滑流形．同时在每一点 $P_0\in M_c$ 的邻域中，可以取其外围欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的某 $(n-1)$ 个笛卡儿坐标作为局部坐标．

证明 其实定理1是用方便的术语叙述的隐函数定理．固定某一点 $P_0\in M_c$，$P_0=(x_0^n,\cdots,x_0^1)$．因为

$$\operatorname{grad}_{P_0} f \neq 0, \quad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

因此在 P_0 点不为 0 的偏导数存在. 不失一般性,可认为$\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0^1, \cdots, x_0^n) \neq 0$. 设 $Q_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^{n-1})$是 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的点, 它是 P_0 沿坐标轴 x^n 投影的象. 根据隐函数定理,存在这样的点 Q_0 的邻域 $V_0 \ni Q_0$,区间$(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$, 以及定义在邻域 V_0 中的 C^∞ 类光滑连续函数 $y = y(x^1, \cdots, x^{n-1})$,使

1° $f(x^1, \cdots, x^{n-1}, y(x^1, \cdots, x^{n-1})) \equiv c$ 在区域 V_0 中成立,

2° $x_0^n = y(x^1, \cdots, x^{n-1})$,

3° $|x_0^n - y(x^1, \cdots, x^{n-1})| < \delta$ 在区域 V_0 中成立,

4° 方程 $f(x^1, \cdots, x^n) = c$ 的所有解$(x^1, \cdots, x^n) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$具有形式 $x^n = y(x^1, \cdots, x^{n-1})$. 当用 U_0 表示点 $P_0 \in M_c$ 的邻域时,则有 $U_0 = M_c \cap (V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta))$. 邻域 U_0 便是所求的包含点 P_0 的图. 取 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 的投影在 U_0 上的限制 $\varphi_0(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^{n-1}) \in V_0$ 作为同胚 φ_0. 其逆映射 φ_0^{-1} 由等式

$$\varphi_0^{-1}(x^1, \cdots, x^{n-1}) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, y(x^1, \cdots, x^{n-1}))$$

给出.

由条件 3° 得到,$\varphi_0^{-1}(x^1, \cdots, x^{n-1}) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$, 而由条件 1°,$\varphi_0^{-1}(x^1, \cdots, x^{n-1}) \in M_c$. 于是,$\varphi_0^{-1}(x^1, \cdots, x^{n-1}) \in V_0$. 映射 φ_0 和 φ_0^{-1} 是连续的,并且是互逆的.

我们证明了集合 M_c 是$(n-1)$维流形, 并且指出了在每一点 $P_0 \in M_c$ 的邻域中的局部坐标系由欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的某些笛卡儿坐标组成. 现在我们证明坐标变换函数是光滑函数. 设点 P_0 还包含在一个图 U_1 中,并且取笛卡儿坐标$(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^n)$作为图 U_1 中的局部坐标. 那么在图的交 $U_0 \cap U_1$ 中,坐标$(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^n)$表示为坐标$(x^1, \cdots, x^{n-1})$的函数:

$$x^1 = x^1,$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots \\
&x^{i-1}=x^{i-1}, \\
&x^{i+1}=x^{i+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^{n-1}=x^{n-1} \\
&x^{n}=y(x^{1},\cdots,x^{n-1}).
\end{aligned} \tag{1}
$$

因为 $y=y(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 是 C^∞ 类光滑的函数，所以(1)中所有的函数也是 C^∞ 类光滑的．定理 1 证完．

例 2 重新考察由方程 $f(x^1,\cdots,x^{n+1})=\sum\limits_{k=1}^{n+1}(x^k)^2=1$ 给出的 n 维球面 S^n．函数 f 的梯度等于 $\operatorname{grad} f=(2x^1,2x^2,\cdots,2x^{n+1})$．若点 $P=(x^1,\cdots,x^{n+1})$ 在球面 S^n 上，那么它的坐标不全为 0，于是，梯度坐标中有一个不为 0．满足定理 1 的条件，这就是说，球面 S^n 是 C^∞ 类光滑流形．

例 3 考察 n^2 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n^2}$．把 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 中的点表示为具有坐标 $A=(a_{ij})$ 的 n 阶方阵 A．考察行列式等于 $1(\det A=1)$ 的所有矩阵 $A\in\boldsymbol{R}^{n^2}$ 的集合 $SL(n,\boldsymbol{R})$．集合 $SL(n,\boldsymbol{R})$ 关于矩阵乘积的运算构成群并称为特殊线性群．我们证明群 $SL(n,\boldsymbol{R})$ 是 C^∞ 类光滑流形，并且其维数为 n^2-1．考虑 n^2 个变量的函数 $f(a_{ij})=\det(a_{ij})$．函数 f 是多项式，也就是说是 C^∞ 类光滑函数．为了应用定理 1，应该计算函数 f 在群 $SL(n,\boldsymbol{R})$ 的所有的点的梯度．设 E 是单位矩阵．因为 $\det E=1$，所以 $E\in SL(n,\boldsymbol{R})$．计算函数在点 E 的梯度．为此，首先按第一行把 $\det A$ 展开：

$$\det A=a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}\det A_{1n}. \tag{2}$$

在展开式(2)中，有矩阵 A_{1k} 的行列式，它们是 (a_{ij}) 中除去第一行的所有变量的多项式．于是函数 f 关于 a_{11} 的偏导数有形式：

$\frac{\partial f}{\partial a_{11}}=\frac{\partial}{\partial a_{11}}(a_{11}\det A_{11})=\det A_{11}$. 在$E$点，得到

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E)=1. \tag{3}$$

于是，函数f在E点的梯度不等于0. 现在证明，在任意点$A_0\in SL(n,\boldsymbol{R})$，函数$f$的梯度也不等于0. 我们引进新的变量$b_{ij}$，它由下面等式给出：$(b_{ij})=B=A_0^{-1}A=A_0^{-1}\cdot(a_{ij})$. 若$A=A_0$，则$B=E$. 那么

$$f(A)=f(A_0B)=\det(A_0B)=\det A_0\cdot\det B=f(B).$$

微分上式，利用复合函数求导法则，得到：

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E)=\sum_{ij}\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)\cdot\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}. \tag{4}$$

按照公式(3)，等式(4)的左边部分等于1. 于是右边部分至少一个被加项不为0，就是偏导数$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)$中有一个不为0，和它一起，也有函数$f$的梯度不为0. 于是，定理1的条件得到满足，也就是群$SL(n,\boldsymbol{R})$是光滑流形，维数为n^2-1.

定理1容易推广到非线性方程组的情形. 我们指出，定理1的条件可用下面方式叙述. 函数f的梯度表示为函数f的偏导数行的形式，也就是函数f的Jacobi矩阵. 那么f的梯度在某点$P_0\in\boldsymbol{R}^n$的非平凡性等价于函数f的Jacobi矩阵df的秩等于1，即取最大的秩.

设给出方程组

$$\begin{aligned}
&f^1(x^1,\cdots,x^n)=c^1,\\
&f^2(x^1,\cdots,x^n)=c^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^k(x^1,\cdots,x^n)=c^k,
\end{aligned} \tag{4'}$$

简略地可写为$f(\vec{x})=\vec{c}$，这里$\vec{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n$，$\vec{c}=(c^1,\cdots,$ [illegible]

$\in \boldsymbol{R}^k$，而 f 是映射，由函数 $(f^1, \cdots, f^k)$ 所定义. 方程组(4′)解的集合 $M^n_{\vec{c}}$ 称为函数组 $(f^1, \cdots, f^k)$ 的等高线流形.

定理2 设 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^k$ 是 C^∞ 类光滑映射，$M^n_{\vec{c}}$ 是方程组 $f(\vec{x}) = \vec{c}$ 解的集合. 若映射 f 的 Jacobi 矩阵的秩在每一点 $P_0 \in M^n_{\vec{c}}$ 都取最大的秩(即 rank $df(P_0) = k$)，则 $M_{\vec{c}}$ 是 $(n-k)$ 维 C^∞ 类光滑流形. 同时，在每一点 $P_0 \in M^n_{\vec{c}}$ 的邻域中，可以取外围欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的某 $(n-k)$ 个笛卡儿坐标作为其局部坐标.

证明 定理 2 的证明是逐字逐句地重复定理 1 的证明，仅有的差别是，不是一个变量 x^n，而是 k 个变量 $(x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})$. 用一个字母来表示这组变量，譬如说 $\vec{y} = (x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})$. 我们将得到在定理 1 的证明中所得到过的同样的公式.

例 4 在具有坐标 (x^1, x^2, x^3, x^4) 的欧氏空间 $\boldsymbol{R}^4$ 中，考察两个方程的组：

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \ (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \tag{5}$$

相应的函数 f_1 和 f_2 有形式：

$f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2$, $f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^3)^2 + (x^4)^2$.

为了应用定理 2，我们来计算映射 $f = (f^1, f^2)$ 的 Jacobi 矩阵：

$$df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^4} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}.$$

很明显，仅当 Jacobi 矩阵的某一行的各个元素都等于零时，rank $f \leqslant 1$，但这些点不可能是方程组(5)的解. 于是方程组(5)的解构成2维的 C^∞ 类光滑流形. 因为方程组(5)分为两个方程，每一个方程有自己的一组变量，所以解的集合也可以表示为每个方程各自解的笛卡儿乘积，即方程组(5)的解表示为两个圆周的乘积. 这个流形称为(二维)**环面**.

§3 切向量 切空间

在第一章中看到，对研究曲线和曲面的度量性质，以及一般地，对研究欧氏空间区域的度量性质来说，所谓空间的无穷小性质起着重要的作用. 这样的性质是在固定点 P 的很小的邻域中，用忽略掉与到 P 点的距离相比是高阶小量的方法来确定的. 在数学分析中，在研究某点邻域中函数的性态时，有类似的略掉无穷小量的手续. 在研究光滑流形时，也希望实行略掉无穷小量的做法. 这些方法之一就是引进类似于曲线的切向量和曲面的切平面那样专门的概念.

1. 简单的例子

我们考察三维空间 R^3 中光滑曲线，用参数 t 使它参数化: $\vec{x}=\vec{x}(t)=(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$. 固定一个参数值 t_0. 在点 t_0 的邻域中，将向量函数 $\vec{x}=\vec{x}(t)$ 用泰勒公式展开:

$$\vec{x}(t_0+\Delta t)=\vec{x}(t_0)+\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t+O(\Delta t^2). \tag{1}$$

(1)的右边的前两项，一方面可看作在点 t_0 的邻域中用线性向量函数对向量函数 $\vec{x}(t)$ 的某种近似，另一方面这个线性函数 $\vec{y}(\Delta t)=\vec{x}(t_0)+\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t$ 在 R^3 中为过点 $P_0=\vec{x}(t_0)$ 的直线. 并且，在过 P_0 的所有直线中，直线 $\vec{y}(t)$ 最"紧密接近"原来的曲线 $\vec{x}(t)$. 我们首先要明确直线"紧密接近"曲线 $\vec{x}(t)$，是什么意思? 对直线 $\vec{y}(t)=\vec{a}+\vec{b}t$ ($|\vec{b}|=1$) 和曲线 $\vec{x}(t)$，在点 $\vec{x}(t_0)$，若从点 $\vec{x}(t)$ 到此直线的距离与从点 $P_0=\vec{x}(t_0)$ 到 $\vec{x}(t)$ 的距离相比是无穷小量，则说直线 $\vec{y}(t)$ 在点 $\vec{x}(t_0)$ 切于曲线 $\vec{x}(t)$. 这时，点 P_0 在直线 $\vec{y}(t)$ 上. 可以认为 $\vec{x}(t_0)=\vec{y}(t_0)$. 则 $\vec{y}(t_0+\Delta t)=\vec{x}(t_0)+\vec{b}\Delta t$. 从点 $\vec{x}(t_0+\Delta t)$ 到

直线 $\vec{y}(t)$ 的距离等于

$$|\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0)-\vec{b}[(\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0),\vec{b})]|①$$

$$=O(|\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0)|). \tag{2}$$

假设$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\neq\vec{0}$按照公式(1)展开 $\vec{x}(t)$，得到：

$$\left|\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t-\vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)\Delta t,\vec{b}\right)\right|=O(\Delta t^2),$$

在$\Delta t\to0$ 时，除以 Δt 得

$$\left|\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)-\vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0),\vec{b}\right)\right|=O(\Delta t). \tag{3}$$

因为(3) 的左边部分与 Δt 无关，所以当 $\Delta t\to0$ 时取极限，得到等式

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)=\vec{b}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0),\vec{b}\right), \tag{4}$$

这就是说向量 $\vec{b}$ 和$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)$是共线的．于是，向量函数$\vec{x}(t)$的泰勒公式(1) 中的线性部分给出了在点 P_0的切线参数表示式(图 8)．

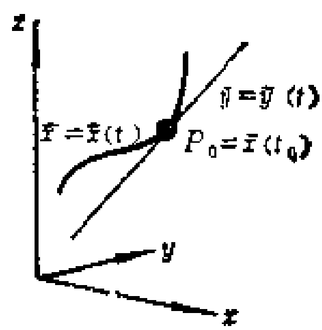


图 8

现在考察三维空间 R^3 中的曲面M，它由两个独立参数 u, v 的向量函数 $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$ 的参数形式给出．曲面 $\vec{x}(u,v)$，若偏导数$\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u, v)$和$\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u,v)$作为 R^3 中的向量在每一点都是线性无关的，则称曲面$\vec{x}(u,v)$是**正则②曲面**．固定参数(u_0,v_0)和过曲面上的点 $P_0=\vec{x}(u_0,v_0)$的平面 Π：$\vec{x}=\vec{x}(u_0,v_0)+\vec{a}u+\vec{b}v$．若从 Π 到点 $\vec{x}(u,v)$的距离比起点 $\vec{x}(u,v)$到点 P_0 的距离来是无穷小量，则称 Π 为

---

① 这里$(\vec{a},\vec{b})$表示欧氏空间的内积——译注．

② 原文为"Невырожденный"——译注．

曲面M在点P_0的**切平面**. 按照泰勒公式在点(u_0, v_0)将函数$\vec{x}(u, v)$展开:

$$\vec{x}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)=\vec{x}(u_0, v_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$$

$$+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v+O(\Delta u^2+\Delta v^2), \quad (5)$$

我们得到,展开式(5)的线性部分表示了曲面M在点$P_0=\vec{x}(u_0, v_0)$的切平面,它是两个参数的表示式(图9). 切平面Π上任何以P_0为起点的向量自然称为曲面M在点P_0的**切向量**. 由公式(5)可以看出,曲面M在点P_0的切平面Π的参数式为:

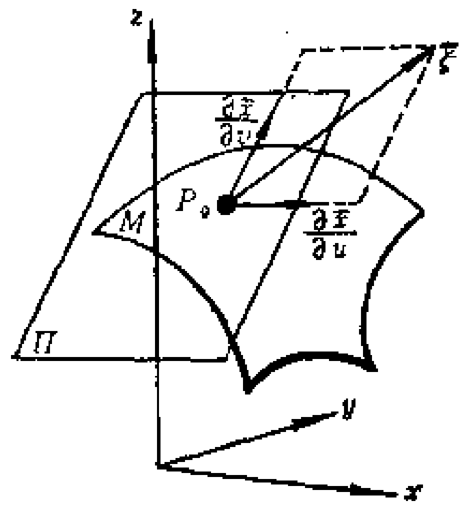


图 9

$$\vec{x}(\Delta u, \Delta v)=\vec{x}(u_0, v_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v. \quad (6)$$

于是,任何切向量$\vec{\xi}$分解为向量$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$和$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$的线性组合:

$$\vec{\xi}=\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v, \quad (7)$$

其中$\Delta u, \Delta v$为适当选择的参数. 这样,向量$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$和$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(v_0, v_0)$组成了切平面$\Pi$的基底,而量$\Delta u, \Delta v$便是切向量$\vec{\xi}$在这个基底下的线性坐标.

现在,在曲面M上画出过点P_0的光滑曲线$\vec{x}=\vec{x}(t)$. 因为曲线$\vec{x}=\vec{x}(t)$在曲面M上,所以它的参数式可以表示为函数$\vec{x}(u, v)$与某些函数$u(t), v(t)$的合成:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}(u(t), v(t)). \quad (8)$$

这也可用另外的方式叙述：函数 $u(t)$，$v(t)$是在曲面M的局部坐标系(u,v)中曲线的参数表示. 那么，曲线通过点 P_0 的条件可以写为坐标的条件：$u_0=u(t_0)$，$v_0=v(t_0)$. 现在来计算曲线的切向量(或称为曲线的速度向量)：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)=\frac{d}{dt}(\vec{x}(u(t),v(t)))\Big|_{t=t_0}$$

$$=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u(t_0),\ v(t_0))\frac{du}{dt}(t_0)+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u(t_0),v(t_0))\ \frac{dv}{dt}(t_0)$$

$$=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,\ v_0)\frac{du}{dt}(t_0)+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,\ v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).$$

于是，曲面M上曲线的切向量在切平面上.

定义 设$\vec{\xi}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\xi^1+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\xi^2$ 是曲面M在点 P_0的切向量. 则数(ξ^1,ξ^2)称为曲面M在点 P_0 的切向量 $\vec{\xi}$在曲面M的局部坐标系(u,v)中的坐标.

这个定义不仅适用于曲面M上的坐标(u,v)，此时以$(u,\ v)$作为参数给出了曲面M：$\vec{x}=\vec{x}(u,v)$，而且这定义也适用于点 P_0 的邻域中的任何坐标系(u',v'). 事实上，若(u',v')是另外的坐标系，则坐标 u 和 v 表示为坐标(u',v')的光滑函数：$u=u(u',v')$，$v=v(u',v')$，$u_0=u(u'_0,v'_0)$，$v_0=v(u'_0,v'_0)$. 那么，看作函数的合成时，我们得到曲面M的新的参数式：

$$\vec{x}=\vec{x}(u(u',v'),v(u',v')).\tag{9}$$

在点 P_0 的切平面 Π 对新的参数(u',v')的参数方程为：

$$\vec{x}=\vec{x}(u(u'_0,v'_0),v(u'_0,v'_0))+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u'_0}\Delta u'+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v'_0}\Delta v'$$

$$=\vec{x}(u_0,\ v_0)+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,\ v_0)\frac{\partial u}{\partial u'}\Delta u'+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,\ v_0)\frac{\partial v}{\partial u'}\Delta u'$$

$$+\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,\ v_0)\frac{\partial u}{\partial v'}\Delta v'+\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,\ v_0)\frac{\partial v}{\partial v'}\Delta v'$$

$$=\vec{x}(u_0, v_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\left(\frac{\partial u}{\partial u'}(u_0', v_0')\Delta u'+\frac{\partial u}{\partial v'}(u_0', v_0')\Delta v'\right)$$

$$+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\left(\frac{\partial v}{\partial u'}(u_0', v_0')\Delta u'+\frac{\partial v}{\partial v'}(u_0', v_0')\Delta v'\right).$$

置

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial u'}(u_0', v_0')\Delta u'+\frac{\partial u}{\partial v'}(u_0', v_0')\Delta v',$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial u'}(u_0', v_0')\Delta u'+\frac{\partial v}{\partial v'}(u_0', v_0')\Delta v', \tag{10}$$

我们就得出切平面对旧的参数(u,v)的参数式:

$$\vec{x}=\vec{x}(u_0, v_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v.$$

于是，公式(9)给出了具有相同切平面Π的曲面M的另外的参数式. 因此曲线(8)借助于某些函数$u'(t)$，$v'(t)$可以写成$\vec{x}(t)=\vec{x}(u(u'(t),v'(t)),v(u'(t),v'(t)))$. 那么，按照曲线的切向量在局部坐标系$(u',v')$中的坐标定义，数对$\left(\frac{du'}{dt}(t_0), \frac{dv'}{dt}(t_0)\right)$是曲线的切向量的坐标. 微分复合函数，得到曲线的切向量在不同的局部坐标系中，其坐标之间的关系:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t_0)&=\frac{\partial u}{\partial u'}(u_0', v_0')\frac{du'}{dt}(t_0)+\frac{\partial u}{\partial v'}(u_0', v_0')\frac{dv'}{dt}(t_0),\\ \frac{dv}{dt}(t_0)&=\frac{\partial v}{\partial u'}(u_0', v_0')\frac{du'}{dt}(t_0)+\frac{\partial v}{\partial v'}(u_0', v_0')\frac{dv'}{dt}(t_0).\end{aligned}\tag{11}$$

比较公式(10)和(11)得到，切向量的坐标之间的关系是和定义切平面的参数的替换是一致的.

当曲面M上曲线切向量的坐标不依赖于曲面M在三维空间$\mathbf{R}^3$中的嵌入方式，而仅依赖于曲面M上局部坐标系(u,v)时，所引进的切向量的定义才是合适的. 我们作为一个独立的引理来叙述这个结论.

引理 1 设M是$\mathbf{R}^3$中正则曲面，$P_0\in M$，(u,v)是曲面M上点

P_0 的邻域中的局部坐标系，$(u(t), v(t))$是曲面M上的光滑曲线. 于是，曲线在点 P_0 的切向量在局部坐标系 (u, v) 下具有坐标 $\left(\frac{du}{dt}(t_0), \frac{dv}{dt}(t_0)\right)$. 若 $\vec{x}=\vec{x}(u, v)$是M的参数式，$\vec{x}(t)=\vec{x}(u(t), v(t))$是曲线，则

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t_0)=\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0)+\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).$$

2. 切向量的一般定义

我们考察过的例子表明，研究流形上曲线的无穷小性质仅可能在流形的某个局部坐标系的范围内进行. 特别，任意光滑流形的切向量和切空间在几何中起着重要的作用，这完全类似于位于三维空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的曲面的切向量和切空间.

定义 1 设M是光滑的 n 维流形，$P_0 \in M$ 是任意点. 使每一个局部坐标系$(x_i^1, \cdots, x_i^n)$对应一组数$(\xi_i^1, \cdots, \xi_i^n)$的对应，若对每一对局部坐标系满足下面的关系式

$$\xi_i^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l, \tag{12}$$

则称此对应为流形M上一点P_0的切向量.

数$(\xi_i^1, \cdots, \xi_i^n)$称为切向量$\vec{\xi}$在局部坐标系$(x_i^1, \cdots, x_i^n)$中的坐标. 关系式(12)称为在局部坐标变换下切向量$\vec{\xi}$的**坐标变换的张量规则**.

定义 1 推广了曲面上曲线的切向量的坐标概念. 那些坐标变化的规则(11)是流形上切向量坐标变换的张量规则(12)的特殊情形. 并且，光滑流形上的每一条光滑曲线的每一点具有定义 1 意义下的切向量. 我们把这个重要性质叙述为命题.

命题 1 设M是光滑流形，$\gamma:(-1, 1)\to M$是区间$(-1, 1)$到

流形M的光滑映射. 则使点$P_0=\gamma(0)$的邻域中的每一个曲部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$对应一组数$\left(\frac{dx^1}{dt}(\gamma(t)),\cdots,\frac{dx^n}{dt}(\gamma(t))\right)_{t=0}$的对应是定义1意义下的切向量.

证明 为证明命题1, 只要验证坐标变换的张量规则(12)即可. 设$\xi_j^k=\frac{dx_j^k}{dt}(\gamma(t))\Big|_{t=0}$,这里$(x_j^1,\cdots,x_j^n)$是流形$M$上点$P_0$的邻域中的局部坐标系. 那么对两个局部坐标系,得到:

$$\xi_i^k=\frac{d}{dt}x_i^k(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}(x_i^k(x_j^1(\gamma(t)),\cdots,x_j^n(\gamma(t)))\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(\gamma(t))\frac{d}{dt}x_j^l(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l,$$

这就是张量规则(12). 命题证完.

于是,在命题1中指出的对应很自然地称为**曲线γ的切向量**或**曲线γ的速度向量**.曲线γ的切向量将表示为$\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$或$\dot{\gamma}(t_0)$.

3. 切空间$T_{P_0}(M)$

流形M上固定点P_0的所有切向量的集合称为**流形M在点P_0的切空间**. 这个集合用$T_{P_0}(M)$表示. 每一个切向量$\vec{\xi}\in T_{P_0}(M)$由其在一个固定坐标系中的坐标唯一确定. 实际上, 若给我们一组数$(\eta^1,\cdots,\eta^n)$,并且把这组数当作是在固定的局部坐标系$(x_{i_0}^1,\cdots,x_{i_0}^n)$中所求切向量的坐标, 即$\eta^k=\xi_{i_0}^k$, 那么对给出整个切向量来讲,必须确定出它在每一个局部坐标系$(x_i^1,\cdots,x_i^n)$中的坐标. 为此,设

$$\xi_i^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\eta^l.$$

所得到的坐标应该满足坐标变换的张量规则(12)．为验证这个规则，在(12)中代入 ξ_i^k 和 ξ_j^s 的值：

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\eta^l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\eta^l$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\right)\eta^l.$$

因为$\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)$（三重坐标变换的 Jacobi 矩阵的变换规则），所以关系式(12)恒等地满足．

于是，我们已证明了流形M上点 P_0 的所有切向量的集合由它们在一个固定局部坐标系中的坐标来唯一地描述．于是整个切空间$T_{P_0}(M)$与算术向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 可视为同一空间．这就是说，切空间$T_{P_0}(M)$可以具备线性空间的结构．看起来，$T_{P_0}(M)$中的线性空间的结构依赖于点 P_0 邻域中局部坐标系的选择．其实相反的命题是正确的．

命题 2 切空间$T_{P_0}(M)$中向量的加法运算和数乘向量的运算不依赖于流形M在点 P_0 邻域中的局部坐标系的选择．

证明 设$\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$是$T_{P_0}(M)$中两个向量，$(x_i^1,\cdots,x_i^n)$，$(x_j^1,\cdots,x_j^n)$是流形M在点 P_0 的邻域中的两个局部坐标系．设$(\xi_i^1,\cdots,\xi_i^n)$，$(\eta_i^1,\cdots,\eta_i^n)$是向量$\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$在坐标系$(x_i^1,\cdots,x_i^n)$中的坐标，而$(\xi_j^1,\cdots,\xi_j^n)$，$(\eta_j^1,\cdots,\eta_j^n)$是同样的向量在坐标系$(x_j^1,\cdots,x_j^n)$中的坐标．那么，按照切向量坐标变换的张量规则(12)，下面关系式成立：

$$\xi_i^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l,\tag{13}$$

$$\eta_i^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\eta_j^l.\tag{14}$$

于是，将这两个等式逐项相加，得到：

$$(\xi_i^k+\eta_i^k)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\xi_j^l+\eta_j^l).$$

此等式指出，数组$((\xi_i^1+\eta_i^1),\cdots,(\xi_i^n+\eta_i^n))$依从坐标变换的张量规则，即这组数确定了一个切向量，而与局部坐标系的选择无关。

同上面那样，(13)乘 λ，得到$\lambda\xi_i^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\lambda\xi_j^l)$，即数组$(\lambda\xi_i^k)$也依从切向量坐标变换的张量规则。命题证完。

坐标变换的张量规则(12)可看作是把各个局部坐标系中切向量坐标的算术空间视为同一的方法。这个方法在于：用坐标$(x_j^1,\cdots,x_j^n)$变到坐标$(x_i^1,\cdots,x_i^n)$的 Jacobi 矩阵乘坐标(ξ_j^l)的列：

$$\begin{pmatrix}\xi_i^1\\ \vdots\\ \xi_i^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^1} & \cdots & \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_i^n}{\partial x_j^1} & \cdots & \frac{\partial x_i^n}{\partial x_j^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_j^1\\ \vdots\\ \xi_j^n\end{pmatrix}$$

或写为$(\xi_i^k)=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\xi_j^l)$.

于是，切空间$T_{P_0}(M)$同构于所有的切向量坐标的算术空间。

4. 密切曲线束

在上一段，给出了流形的切空间的代数形式的定义。在这个定义中，切向量的几何性质，即切向量作为曲线的线性近似的性质，不很明显。若不管流形在线性空间的位置，又如何来确定这个性质呢？同一个向量显然可对应以此向量为切线的许多曲线。所以，当在线性空间中一旦分出有共同切向量的一类曲线时，可能对我们就没有留下什么了！

定义 2 流形M上交于一点 P_0 的两条曲线 γ_1,γ_2，若在 P_0的

邻域中的每一个局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中，满足关系式

$$\sum_{k=1}^{n}(x^k(\gamma_1(t))-x^k(\gamma_2(t)))^2=o(t-t_0)^2 \quad (t\to t_0), \tag{15}$$

则称 γ_1, γ_2 是**密切的**.

也象以前一样，密切条件(15)只要在一个局部坐标系中验证就足够了. 密切条件与切向量有密切的联系. 下面的定理也证实了术语"密切曲线"是恰当的.

定理 1 流形M上两个光滑曲线 γ_1 和 γ_2 在点 P_0 密切的充要条件是曲线 γ_1 和 γ_2 在点 P_0 的切向量重合.

证明 条件(15)可改写为下面形式:

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k(\gamma_1(t))-x^k(\gamma_2(t))}{t-t_0}\right)^2=0.$$

经初等变换以后，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t))-\frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))\right)^2\bigg|_{t=t_0}=0,$$

或

$$\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t))\bigg|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))\bigg|_{t=t_0}. \tag{16}$$

这个等式表明曲线 γ_1 和 γ_2 的切向量重合，$\dot{\gamma}_1(t_0)=\dot{\gamma}_2(t_0)$.

反过来，若 $\dot{\gamma}_1(t_0)=\dot{\gamma}_2(t_0)$，则等式(16)成立，并且

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k(\gamma_1(t))-x^k(\gamma_2(t))}{t-t_0}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t))-\frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))\right)^2=0.$$

定理 1 给出了定义曲线切向量的另一种方法. 流形M上所有过点 P_0 的光滑曲线，可分为两两无共同曲线的类，而每一类中的

曲线则是两两密切的．我们称过点$P_0\in M$的相互密切的曲线类为**切向量**．于是，我们得到定义1意义下的切向量和密切曲线类意义下的切向量(图10)之间的双方单值的对应．

5. 函数的方向导数

还有一种表示流形M上切向量的方法．和往常一样，我们从简单的例子开始．设$f(x,y)$是两个变量的光滑函数，$P_0=(x_0,y_0)$是某一点，$\vec{\xi}=(\xi^1,\xi^2)$是平面$\mathbf{R}^2$中的向量．在数学分析中，研究函数沿着向量$\vec{\xi}$的导数，此导数由下面公式定义：

$$\vec{\xi}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\xi^1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\xi^2. \tag{17}$$

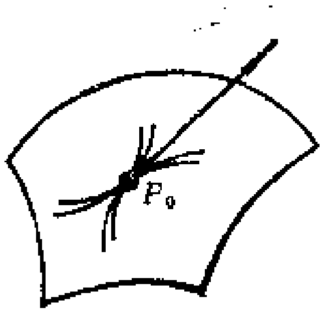


图 10

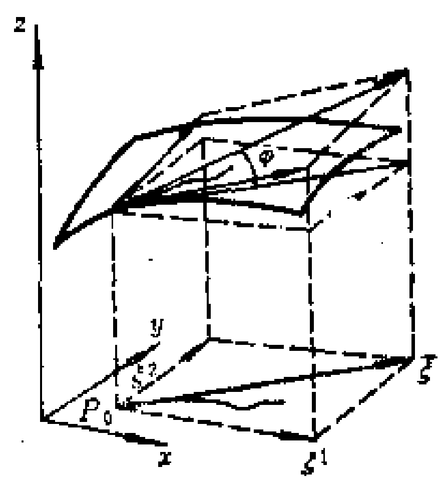


图 11

沿着向量$\vec{\xi}$的导数，可利用光滑曲线定义如下：设$\gamma(t)$是平面$\mathbf{R}^2$上过点P_0的光滑曲线．假设曲线$\gamma(t)$在P_0的切向量等于$\vec{\xi}$．那么(参看图11)

$$\vec{\xi}(f)=\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0},\quad \gamma(t_0)=P_0. \tag{18}$$

实际上，若$\gamma(t)=(x(t),y(t))$，那么$\xi^1=\frac{dx}{dt}(t_0)$，$\xi^2=\frac{dy}{dt}(t_0)$．因而以曲线$\gamma(t)$的坐标替代函数f的自变量，并对参数微分，得到：

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\Big|_{t=t_0}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),\ y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\xi^1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\xi^2=\vec{\xi}(f).$$

于是，在一般情况下，我们根据在点 $P_0\in M$ 对流形 M 的每个切向量 $\vec{\xi}$ 来定义光滑函数在点 P_0 的微分运算.

定义 3 设 $P_0\in M$，$\vec{\xi}\in T_{P_0}(M)$，$\gamma(t)$ 是过点 P_0 的光滑曲线，$\gamma(t_0)=P_0$ 并且它在点 P_0 的切向量等于 $\vec{\xi}$，$\dot{\gamma}(t_0)=\vec{\xi}$. 设 f 是流形 M 上的光滑函数. 称数

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0}=\vec{\xi}(f) \tag{19}$$

为**函数 f 沿着切向量 $\vec{\xi}$ 的导数**. 求导数的运算称为**函数 f 沿着向量 $\vec{\xi}$ 微分**.

定理 2 设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是流形 M 上点 $P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 的邻域中的局部坐标系，$\vec{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 是流形 M 在点 P_0 的切向量，$f=f(x^1,\cdots,x^n)$ 是点 P_0 的邻域中由局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 表示的光滑函数. 于是

$$\vec{\xi}(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i. \tag{20}$$

因此，导数的定义(19)不依赖于曲线 γ 在其密切曲线类中的选择，而(20)的右边的部分不依赖于局部坐标系的选择. 若 g 是点 P_0 的邻域中的另外的光滑函数，则对函数 f 和 g 乘积的牛顿-莱伯尼兹微分公式是正确的：

$$\vec{\xi}(fg)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)\vec{\xi}(g)+\vec{\xi}(f)g(x_0^1,\cdots,x_0^n). \tag{21}$$

证明 把过点 P_0 的曲线 $\gamma(t)$ 表示为坐标形式：$\gamma(t)=$

$(x^1(t),\cdots,x^n(t))$. 则按曲线之切向量的定义，$\frac{dx^i}{dt}(t_0)=\xi^i$. 于是

$$\vec{\xi}(f)=\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}f(x^1(t),\cdots,x^n(t))\Big|_{t=t_0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i.$$

这就证明了公式(20). 现在来证明公式(21). 利用(20)并微分函数的乘积，得到：

$$\vec{\xi}(fg)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(f(x^1,\cdots,x^n)g(x^1,\cdots,x^n))\Big|_{x^k=x_0^k}\xi^i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)g(x_0^1,\cdots,x_0^n)$$

$$+f(x_0^1,\cdots,x_0^n)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\Big)\xi^i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i\right)g(x_0^1,\cdots,x_0^n)$$

$$+f(x_0^1,\cdots,x_0^n)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i\right)$$

$$=\vec{\xi}(f)g(x_0^1,\cdots,x_0^n)+f(x_0^1,\cdots,x_0^n)\vec{\xi}(g).$$

这样，也便证明了公式(21).

光滑函数 f 沿着切向量$\vec{\xi}$的微分运算可用其本身的某些特性来描述，在这些特性的叙述中完全不参与任何局部坐标系. 这种描述的方法在验证我们的几何结构与具体的局部坐标系无关时是最合适的. 微分运算有两个这样的性质：

1°沿着向量$\vec{\xi}$的微分运算是线性的，即若 f 和 g 是两个光滑函数，而 λ,μ 是两个任意的数，则

$$\vec{\xi}(\lambda f+\mu g)=\lambda\vec{\xi}(f)+\mu\vec{\xi}(g); \tag{22}$$

2° 沿着向量$\vec{\xi}$的微分运算满足牛顿-莱伯尼兹公式(21).

我们给出一般的定义.

定义 4 设有运算 A,它使光滑流形M上的 C^∞类的每一个光滑函数 f 对应于数 $A(f)$,并且后者满足性质 1° 和 2°,则称 A 为点 $P_0\in M$ 的微分运算.

在牛顿-莱伯尼兹公式(21)中,参与了在点 P_0 的函数值.所以在不同点 P_0 和P_1的微分运算不会相同.很明显,沿着切向量$\vec{\xi}$的微分运算只是在定义 4 意义下微分运算的特殊情况.事实证明没有其他的微分运算,就是说,对每一个在定义 4 意义下的微分运算,可以找到这样的切向量,沿着这个切向量也实施函数的微分.

定理 3 设M是 C^∞类光滑流形,$P_0\in M$是任意点,A 是定义 4 意义下的微分运算.于是在点 P_0 存在唯一的切向量$\vec{\xi}$,使得对点 P_0 邻域中的任何光滑函数 f,有 $A(f)=\vec{\xi}(f)$.

证明 我们将在点 P_0 邻域的某个局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中寻求切向量而表示成坐标行的形式.这时可把所有光滑函数表示为变量$(x^1,\cdots,x^n)$的函数的形式.

引理 2 任一 C^∞类光滑函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$可表示为

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)(x^i-x_0^i)$$

$$+\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j), \tag{23}$$

其中 $h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$是 C^∞类光滑函数.

证明 我们写出恒等式

$$f(x^1,\cdots,x^n)\equiv f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\int_0^1\frac{d}{dt}f(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,$$

$x_0^n+t(x^n-x_0^n))dt,$

并在积分号下关于 t 进行微分：

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+$$

$$\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1+t(x^1-x_0^1)\cdots,x_0^n+t(x^n-x_0^n))(x^i-x_0^i)dt$$

$$=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)h_i(x^1,\cdots,x^n). \tag{24}$$

在此等式右端之最后一项中函数

$$h_i(x^1,\cdots,x^n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^n+t(x^n-x_0^n))dt$$

是 C^∞ 类光滑函数．替换 $x^i=x_0^i$，得到

$$h_i(x_0^1,\cdots,x_0^n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)dt=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n). \tag{25}$$

现在应用公式(24)到函数 $h_i(x^1,\cdots,x^n)$ 本身，得到：

$$h_i(x^1,\cdots,x^n)=h_i(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{j=1}^n(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n), \tag{26}$$

其中 $h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$ 是 C^∞ 类的某些光滑函数．将(26)代入(24)中，并考虑到(25)：

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)$$

$$+\sum_{i,j=1}^n(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n).$$

结果，得到所求的表示式(23)．

引理 3 设 f, g 是流形 M 上的两个光滑函数，满足 $f(P_0)=g(P_0)=0$．则对点 P_0 的任何微分 A, $A(fg)=0$ 成立．

证明 引理 3 立刻由牛顿-莱伯尼兹公式(21)得到.

现在,我们转到定理 3 的证明. 把函数 f 表示为(23)的形式,并在其两边进行微分运算 A. 由于运算是线性的,得到:

$$A(f)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(x^i-x_0^i)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}A((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)). \qquad (27)$$

我们指出,对于等于 1 的常数函数,$A(1)=A(1\cdot1)=A(1)\cdot1+1\cdot A(1)=2A(1)=0$. 其次,在(27)的最右端和式中, 表示为两个函数$(x^i-x_0^i)$和$(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$乘积的每一个被加项,在点 $P_0\in M$,这两个函数都变为 0. 所以根据引理 3, $A((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n))=0$. 于是,

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(x^i-x_i^0). \qquad (28)$$

因为在公式(28)中,函数 f 是任意的,所以令 $\xi^i=A(x^i-x_0^i)$,我们得到这样的向量$\vec{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$,使

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i=\vec{\xi}(f).$$

现在,证明所求向量$\vec{\xi}$ 的唯一性. 若找到两个不同的切向量$\vec{\xi}$和$\vec{\eta}$, 使 $A(f)=\vec{\xi}(f)=\vec{\eta}(f)$, 那么设 $\vec{\zeta}=\vec{\xi}-\vec{\eta}\neq\vec{0}$, 对点 $P_0\in M$ 的邻域中 C^∞类的任何光滑函数 f,成立等式$\vec{\zeta}(f)=0$. 但是,这是不可能的. 事实上, 在局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中, 向量$\vec{\zeta}$有坐标$(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)$,$\zeta^1,\cdots,\zeta^n$ 不全为 0. 假设 $\zeta^k\neq0$. 则对函数 $f(x^1,\cdots,x^n)\equiv x^k$,得到:

$$\vec{\zeta}(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\zeta^k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\zeta^k=\zeta^k\neq0.$$

这样，完全证明了定理 3.

定理 3 建立起流形在点 $P_0\in M$ 的切向量和光滑函数在点 P_0 的微分运算之间双方单值的对应. 所以我们能给出切向量的第三个等价的定义：**切向量是流形上光滑函数在点 P_0 的微分运算.**

例 这里把在某个局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中求偏导数的运算看成光滑函数的微分的例子. 根据定理 3，运算 $\frac{\partial}{\partial x^k}$ 是一个切向量，其坐标为 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$，这里 1 在指标为 k 的位置上. 因此切向量 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ 构成切空间 $T_{P_0}(M)$ 的基底，而所有的切向量 $\vec{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 可分解为线性组合 $\vec{\xi}=\xi^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n\frac{\partial}{\partial x^n}$. 这个方便的表示式在以后将多次被采用.

6. 切丛

流形 M 在点 P_0 的所有切向量的集合 $T_{P_0}(M)$，如我们已经知道的，是与流形 M 维数相同的线性空间. 在几何中，有时研究流形 M 的所有切向量的总和是有用的，很明显，这个总和表示为并 $\bigcup_{P_0\in M}T_{P_0}(M)$. 这个(暂时还不是拓扑的)空间记为 $T(M)$，并称为流形 M 的**切丛**. 用术语"丛"是因为 $T(M)$ 由许多"纤维"——流形在各不同的点 P_0 的切空间——组成. 切丛决不是向量空间，因为不同"纤维"中的向量的加法是无意义的. 例如，若流形 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的二维曲面，那么这时 $T(M)$ 由曲面 M 上的所有切平面的并组成. 应该注意到，曲面的切平面照例是相交的，也就是有公共点. 但是按 $T(M)$ 的定义，这些点在不同的"纤维"中给出不同的向量，因为这些向量的起点是不同的.

考虑下面的例子：圆周 $S^1\subset\boldsymbol{R}^2$. 在图 12 上指出了圆周在点

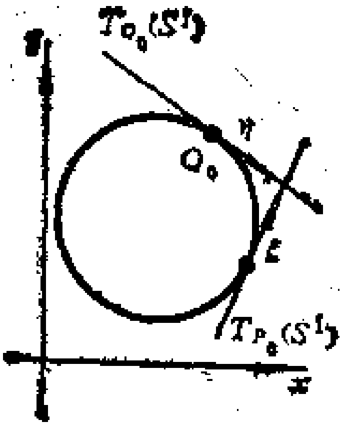


图 12

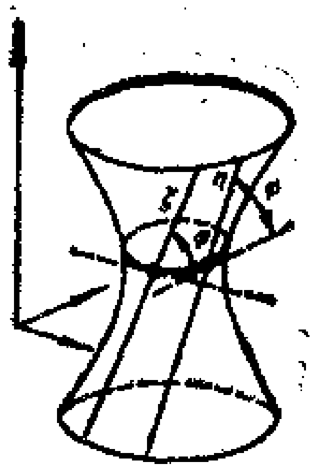


图 13

P_0 和 Q_0 的两条切线和有共同终点的两个切向量 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$. 所以，为使切丛 $T(S^1)$ 表示成安置在欧氏空间中的拓扑空间，必须转移到三维空间 R^3 中，并且把圆周的切线相对于平面 (x, y) "转动"一个角，以使它们不再相交（参看图 13）. 这时切丛变为单叶双曲面（几何的柱面）. 同时失去了切空间 $T_{P_0}(S^1)$ "紧密接近"于圆周的性质. 我们好象"脱离"了圆周的切线并"忘记"了"纤维"应当切于圆周 S^1. 为使 $T_{P_0}(S^1)$ 与 S^1 相切的性质不失去，并且使不同"纤维"不相交，可以将切丛嵌入 R^3 的方法作不大的改变. 这不是在整个圆周 S^1 上能够做到的，而仅在它的一部分弧上可能做到. 我们把弧作为螺旋线嵌入 R^3 中，这时螺旋线的切线不相交（图 14）.

我们考察力学的某些例子，这些例子说明了为了描述力学的

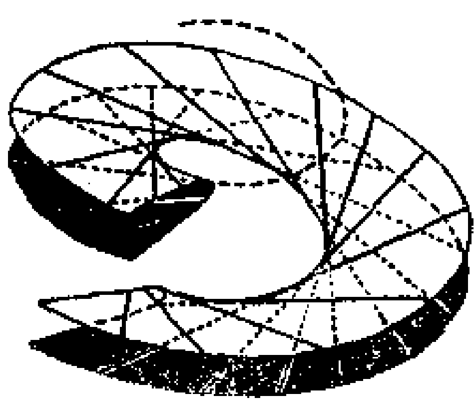


图 14

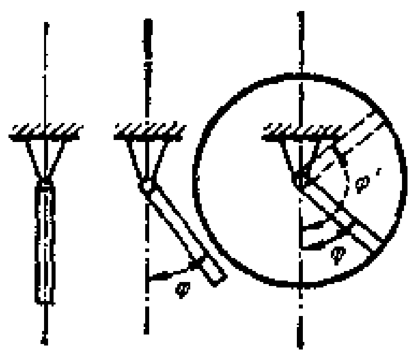


图 15

体系，研究非平凡的流形以及它的切丛是适宜的.

例 1 考察摆的平面运动，即用绞链固定其一端的刚体杆(图15). 这时杆的位置由一个参数确定，此参数就是杆的轴和铅垂线之间的角 φ. 因此，杆的所有位置的集合是圆周 S^1. 一切位置的集合称为**构形空间**.

考察两个绞链的摆——两个用绞链连接的杆(图 16). 摆的位置由两个角 φ_1 和φ_2确定，而所有的位置的集合表为二维的环面 $T^2=S^1\times S^1$. 图 17 表示了另一个系统，在这系统里，构形空间是嵌入 R^3 中的环面.

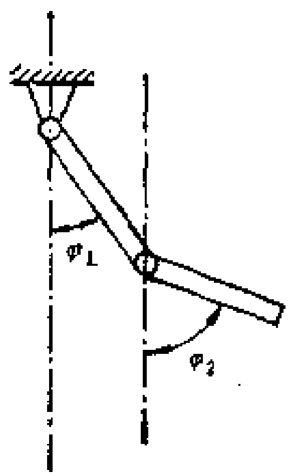


图 16

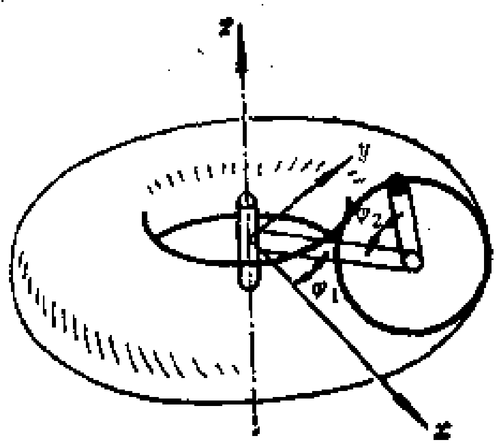


图 17

例 2 在力学中，通常用参数组来描述一个力学系统的运动. 这组参数描述系统的位置和其各部分速度的状况. 考虑到速度的力学系统的所有位置的集合称为**相位空间**. 那么相位空间自然地等同于构形空间的切丛. 例如，若质点在二维球面上以常数模的速度运动，那么相位空间在此情况下将是由等长切向量组成的切丛的子集.

例 3 也有构形空间和相位空间的更复杂的例子. 例如，考察具有固定点的刚性立体. 它在 R^3 中一切可能的位置可用下面的方法来描述. 在刚体上固定三个规范正交向量$\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, 原点

在固定点. 那么，具有固定点的刚体的任何位置唯一地由这三个向量$\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$在R^3中的位置给出. 这样构形空间可等同于R^3中所有规范正交基集合的连通分支.

§4 子流形

现在我们可以转到在光滑流形上研究微分学了. 数学分析的许多重要概念，像函数的微分，临界点，隐函数等在任意的光滑流形上有自然的推广. 在光滑流形的一般理论的范围内，微分学中的这些概念，如函数的微分，函数的梯度，隐函数的理论，函数的正则点及其他等都得到自然的解释.

1. 光滑映射的微分

光滑函数微分的概念容易转到流形上的任何光滑映射的情形.

定义 1 设$f: M_1 \to M_2$是光滑流形的光滑映射. $Q_0 = f(P_0)$，在P_0及$f(P_0)$的邻域的局部坐标系中，由映射f的 Jacobi 矩阵所定义的切空间$T_{P_0}(M_1)$到切空间$T_{Q_0}(M_2)$的线性映射称为**光滑映射f在点$P_0 \in M_1$的微分df_{P_0}.**

提醒一下，在 §1 中定义了函数组$y^1 = f^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^m = f^m(x^1, \cdots, x^n)$的 Jacobi 矩阵为偏导数组成的矩阵:

$$df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

于是，若$(x^1, \cdots, x^n)$是流形M_1上在点P_0的邻域中的局部坐标系，$(y^1, \cdots, y^m)$是流形M_2上在点Q_0的邻域中的局部坐标系，则映射

f 表示为坐标函数组 $y^k=f^k(x^1,\cdots,x^n)$. 而切空间 $T_{P_0}(M_1)$ 和 $T_{Q_0}(M_2)$ 分别表示为长为 n 列和 m 列的算术空间. 这时设切向量 $\vec{\xi}\in T_{P_0}(M_1)$ 具有坐标 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)$，而向量 $\vec{\eta}\in T_{Q_0}(M_2)$ 具有坐标 $(\eta^1,\cdots,\eta^m)$. 若 $\vec{\eta}=df_{P_0}(\vec{\xi})$，则

$$\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(P_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(P_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

上面提到的微分 df_{P_0} 的定义 1，看起来依赖于点 $P_0\in M_1$ 和 $Q_0\in M_2$ 的邻域中的局部坐标系的选择. 而事实并不是这样. 为了说明这一点，我们还应该再取点 $P_0\in M_1$ 和 $Q_0\in M_2$ 的邻域中的一对局部坐标系，并利用切向量坐标变换的张量规则，验证微分的不变性. 我们按另一种方法进行. 这里有三种在流形 M 上定义切向量的方法. 这些方法中有一种根本没有任何局部坐标系参与其中. 这就是通过函数的微分运算来定义切向量的方法. 所以，如果我们用光滑函数的微分的术语重新叙述定义 1，那么就自动地得到映射 f 的微分与流形 M_1 和 M_2 中局部坐标系选取的无关性.

引理1 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑映射，$f(P_0)=Q_0$，$\vec{\xi}\in T_{P_0}(M_1)$ 是流形 M_1 在点 P_0 的切向量，$\vec{\eta}=df_{P_0}(\vec{\xi})$ 是流形 M_2 在点 Q_0 按照定义 1 的意义的切向量. 则对流形 M_2 上的任何光滑函数 g，下列关系式被满足

$$\vec{\eta}(g)=\vec{\xi}(g\circ f). \tag{2}$$

证明 按照定义 1，必须在流形 M_1 和 M_2 的点 P_0 和 $Q_0=f(P_0)$ 的邻域中分别取局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $(y^1,\cdots,y^m)$. 于是映射 f 用函数组 $y^k=f^k(x^1,\cdots,x^n)$ 表示，函数 g 由光滑的坐标的函数 $g=g(y^1,\cdots,y^m)$ 代替，向量 $\vec{\xi}$ 具有坐标 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)$，而向量 $\vec{\eta}$ 具有坐标 $(\eta^1,$

$\cdots,\eta^m)$. 于是

$$\vec{\eta}(g)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^i}(Q_0)\eta^i;$$

$$\vec{\xi}(g\circ f)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}(g\circ f)\xi^j=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}(g(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,$$

$$f^m(x^1,\cdots,x^n)))\xi^j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^i}(Q_0)\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(P_0)\xi^j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^i}(Q_0)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(P_0)\xi^j\right).$$

对上列等式应用公式(1),得到:

$$\vec{\xi}(g\circ f)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^i}(Q_0)\eta^i=\vec{\eta}(g).$$

引理 1 被证明完毕.

以关系式(2)作为映射 f 微分的定义,即令

$$df_{P_0}(\vec{\xi})(g)=\vec{\xi}(g\circ f), \tag{3}$$

根据引理 1,我们得到结论:运算 $g\to df_{P_0}(\vec{\xi})(g)$ 是流形 M_2 上的函数在点 Q_0 的微分运算,即 $df_{P_0}(\vec{\xi})$ 是流形 M_2 在点 Q_0 的切向量,根据公式(1),这与定义 1 是一致的. 于是,定义 1 与局部坐标系的选择无关.

最后,我们来考察上面用密切曲线束术语的切向量的定义.

引理 2 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑映射,$Q_0=f(P_0)$,γ 是流形 M_1 上过点 P_0 的光滑曲线,g 是 M_2 上的光滑函数. 设 $\vec{\xi}=\dot{\gamma}(t_0)$,$\vec{\eta}=df_{P_0}(\vec{\xi})$,于是

$$\vec{\eta}(g)=\frac{d}{dt}g(f(\gamma(t)))\big|_{t=t_0}. \tag{4}$$

证明 通过流形M_1和M_2的某个局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$和$(y^1,\cdots,y^m)$来证明对所有坐标系都适合的引理 2. 设所有的函数和向量在坐标下具有引理 1 中同样的表示式，而 $\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$，$\xi^k=\frac{dx^k}{dt}(t_0)$. 于是

$$\bar{\eta}(g)=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l,$$

$$\frac{d}{dt}g(f(\gamma(t)))\Big|_{t=t_0}=\sum_{l,j}\frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\frac{dx^j}{dt}(t_0)$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(P_0)\xi^j=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^l}(Q_0)\eta^l=\bar{\eta}(g).$$

引理 2 表明了若切向量$\vec{\xi}$表示曲线 $\gamma(t)$的切向量，$\dot{\gamma}(t_0)=\vec{\xi}\in T_{P_0}(M_1)$，那么它的象表示流形$M_2$上曲线 $f(\gamma(t))$的切向量. 此外，由引理 2 得到，若曲线 $\gamma_1(t)$和 $\gamma_2(t)$在点 $P_0\in M_1$ 密切，则它们的象 $f(\gamma_1(t))$和 $f(\gamma_2(t))$在点 $Q_0\in M_2$ 也密切. 所以，映射的微分可以定义为这样的映射：使点 P_0 的密切曲线束$\{\gamma(t)\}$对应于流形M_2上过点 Q_0 的包含所有曲线$\{f(\gamma(t))\}$的密切曲线束. 但是，在用后一方法定义微分时，映射 f 的微分 df_{P_0} 为什么是切空间之间的线性映射，这是不明显的. 图 18 表示映射 $f(x,y)=(x,y^2)$，

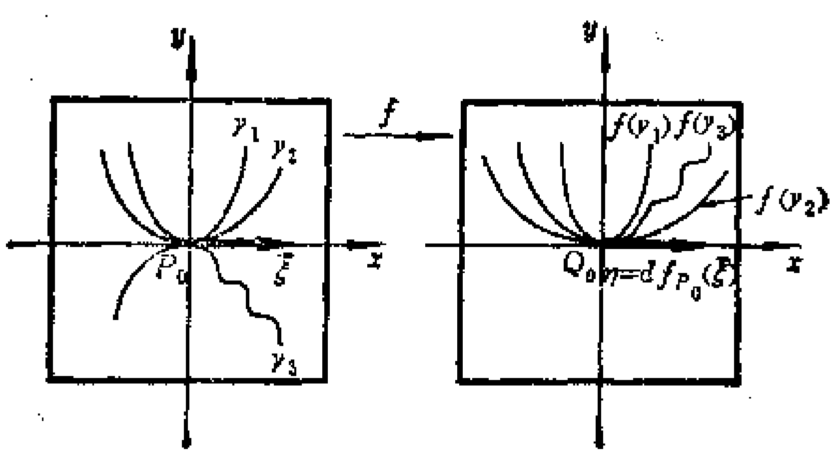


图 18

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$. 同时很明显，在 $P_0=(0,0)$ 密切的曲线束，在映射 f 下，没有包含在 Q_0 密切的所有曲线束.

例 1 把光滑函数 $y=f(x)$ 看作流形间的光滑映射 $f: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$. 于是按照定义 1，微分就是由公式(1)给出的 $T_x(\boldsymbol{R}^1)=\boldsymbol{R}^1$ 到 $T_{f(x)}(\boldsymbol{R}^1)=\boldsymbol{R}^1$ 的线性映射，即 $\eta=f'(x)\xi$. 在数学分析中，函数 $f(x)$ 的微分理解为函数 f 增量的线性部分，它是两个独立变量的函数：$dy=f'(x)dx$. 因此，令 $dx=\xi$, $dy=\eta$, 我们得到概念的一致.

例 2 考察 n 个独立变量的光滑函数 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$. 与一个变量的函数一样，把它表示为流形的光滑映射 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^1$. 于是

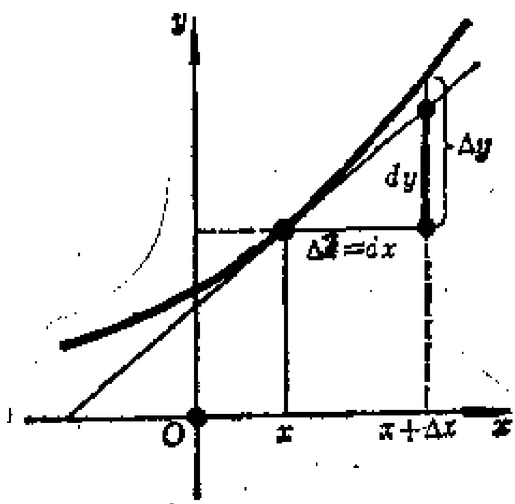


图 19

映射 f 的微分是切空间的线性映射 $df_{P_0}: T_{P_0}(\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}^n \to T_{Q_0}(\boldsymbol{R}^1)=\boldsymbol{R}^1$, 这里 $P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$, $Q_0=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)$. 微分 df_{P_0} 在局部坐标中由公式 $\eta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\xi^k$ 给出. 另一方面，函数 f 的微分是函数 f 的增量的线性部分，它是两组独立变量 $(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $(dx^1,\cdots,dx^n)$ 的函数：

$$dy=df(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1,\cdots,x^n)\,dx^k.$$

令 $\xi^k=dx^k$, $\eta=dy$, 我们得到函数的微分与它作为流形的映射的微

分这两个概念是一致的.此外,微分 df_{P_0} 的矩阵是映射 f 的 Jacobi 矩阵，而从另一方面也是函数 f 的梯度 gradf; 这样，f 的梯度就是在规定的坐标系中微分的矩阵 df_{P_0}. 很清楚，在坐标变换时函数 f 的梯度的分量也将改变.

例 3 考察光滑函数 $f=f(x^1,\cdots,x^n)$，并设 $P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 是函数 f 的极值点,于是分析中一个定理说，这时 $\mathrm{grad}f_{P_0}=0$. 在我们的术语中，这就是说,$df_{P_0}=0$. 这个结论推广到任意流形的情形：若在点 $P_0\in M$ 光滑函数 f 达到局部极大值,则 $df_{P_0}=0$. 这种情况在流形的理论中得到新的阐明. 在欧氏空间的区域中，总是存在这样的光滑函数,使其梯度在每一点不为 0, $\mathrm{grad}f\neq 0$. 而对光滑流形来说已不是这样. 例如，在二维球面 S^2 上,对所有的光滑函数 f 来说,其微分 df 至少在两点为 0：函数 f 的极大值点和极小值点. 一般来说,若 M 是紧致光滑流形,那么对所有的光滑函数 f,使微分 df 等于 0 的点不少于两点. 图 20 表示在二维球 S^2 上的"高度"函数微分的性状. 而图 21 是在环面 T^2 上的"高度"函数.

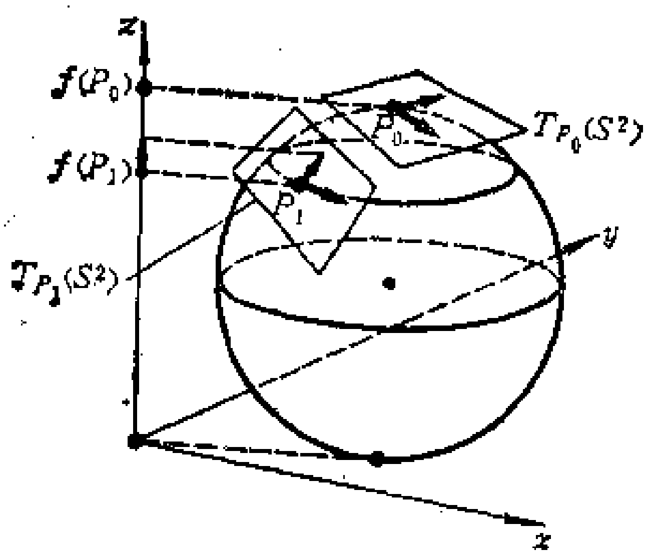


图 20

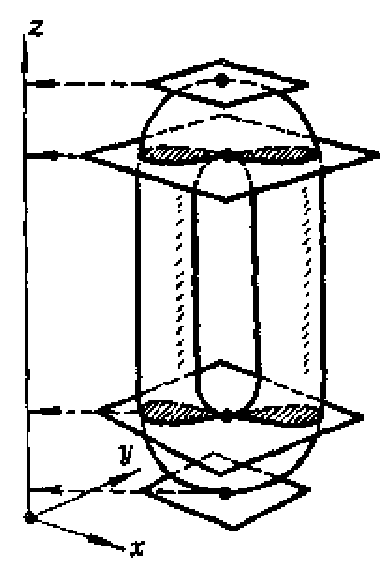


图 21

例 4 $f:R^n\to P^m$ 是线性映射，这个映射用坐标可写为矩阵的形式：$Y=AX$,

$$Y=\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

那么，很明显，映射 f 的 Jacobi 矩阵（也就是微分 df_{P_0}）就是矩阵 A. 换句话说，$df_{P_0}(\xi)=f(\xi)$. 其实这是不奇怪的. 若把微分 df_{P_0} 也想像为在许多自变量情况下映射增量的线性部分，那么，令 $\Delta X=\xi$，$\Delta Y=A(X+\Delta X)-AX=A\Delta X$. 于是，增量 ΔY 本身恒等地与其线性部分一致. 于是线性映射的微分不依赖于点 $P_0\in R^n$.

2. 映射的局部性质和微分

在数学分析中已经指明了光滑函数的重要性质：借助于函数在一点微分的性质可以确定这一点的整个邻域（虽然，也许这个邻域还是很小的）中的类似性质. 例如，若函数 f 的导数 $f'(x_0)$ 是正的，$f'(x_0)>0$，那么在 x_0 的小邻域中函数 f 递增. 要问：微商 $f'(x)>0$ 和函数 f 在点 x_0 的邻域中递增这两个性质的类似性是怎么回事？若条件 $f'(x_0)>0$ 用下面的方法叙述，这个类似性是容易看出来的：函数 f 在点 x_0 的微分是递增的（线性的）函数. 那么分析中的定理将以下面的方式表示：若函数 f 的微分在点 x_0 严格地递增，那么函数 f 本身在点 x_0 的邻域中也严格地递增. 我们再考虑隐函数定理作为第二个例子：对方程 $f(x,y)=0$，若在某点 (x_0,y_0)，有 $f(x_0,y_0)=0$，并且 $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $f(x,y)=0$ 有解 $y=y(x)$. 我们尝试把隐函数的定理条件用微分的术语来叙述. 函数 f 在点 (x_0,y_0) 的微分为：

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy.$$

在方程 $f(x,y)=0$ 中，以函数 f 的微分代替函数 f，并且考察新的方程 $df_{(x_0,y_0)}=0$. 这新的方程关于新的变量 (dx,dy) 是线性的，且

有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy=0. \tag{5}$$

那么条件$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\neq 0$等价于方程(5)有解. 所以隐函数定理可用下面方式来叙述：若有关微分的方程(5)有解，则原来的方程$f(x, y)=0$在(x_0, y_0)的邻域中关于y也有解.

现在我们可以叙述在分析光滑流形和它的映射时有用的原理：若光滑流形的映射在某一点的微分具有某个性质，则映射本身在这点的邻域中也具有类似的性质.

这个原理通常称为**共同状况原理或映射线性化原理**. 第一个名称指出，在映射的小的非线性变化下，线性映射的性质是保持的. 当然，这个原理不是对所有的性质都是正确的，但我们不确证它应用的范围. 这里我们引证极重要的联系映射和它的微分的定理.

我们从关于流形的隐函数定理开始.

定义 2 设$f: M_1\to M_2$是光滑映射. 若映射的微分$df_{P_0}: T_{P_0}(M_1)\to T_{Q_0}(M_2)$, $Q_0=f(P_0)$, 是满同态①, 即映射到整个空间$T_{Q_0}(M_2)$上. 则称点$P_0\in M_1$是**映射f的正则点**. 若原象$f^{-1}(Q_0)$中所有的点P_0都是映射f的正则点时，则称$Q_0\in M_2$为**映射f的正则点**.

定义2用映射微分这个新的不变的术语叙述了关于隐函数定理的条件. 实际上，在点P_0的邻域中的局部坐标系$(x^1, \cdots, x^n)$下，和在点Q_0的邻域中的局部坐标系$(y^1, \cdots, y^m)$下，映射f表示为一组函数$y^k=f^k(x^1, \cdots, x^n)$. 我们把这些等式看成方程

$$f^1(x^1, \cdots, x^n)=y_0^1,$$

① 原文为 эпиморфизм——译注.

$$\cdots\cdots \tag{6}$$

$$f^m(x^1,\cdots,x^n)=y_0^m.$$

因为 $f(P_0)=Q_0, P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n), Q_0=(y_0^1,\cdots,y_0^m)$，所以点 P_0 是方程组(6)的解．于是，隐函数定理(§2，定理 2)给出存在解的条件为：$\operatorname{rank}df=m$．从而，映射 f 的 Jacobi 矩阵的秩，或同样的，微分 df_{P_0} 的矩阵的秩等于切空间 $T_{Q_0}(M_2)$ 的维数．这就是说线性映射 df_{P_0} 是满同态．所以 §2 定理 2 可以作如下的推广．

定理 1 设 $f: M_1\to M_2$ 是光滑流形的光滑映射，$Q_0\in M_2$ 是映射 f 的正则点．则原象 $M_3=f^{-1}(Q_0)$ 是光滑流形，$\dim M_3=\dim M_1-\dim M_2$．此外，可以取 M_1 上的某些局部坐标作为流形 M_3 的局部坐标．

证明 为证明 M_3 是流形，在每一点 $P_0\in M_3$ 的邻域中应用 §2 定理 2 即可．我们得到，每一点 $P_0\in M_3$ 容许有邻域 $U\ni P_0$ 同胚于欧氏空间 $\mathbf{R}^{n-m}$ 的区域，这里 $n=\dim M_1$，$m=\dim M_2$．此外，可以取流形 M_1 在点 P_0 的邻域的局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中的某 $(n-m)$ 个坐标作为邻域 U 中的局部坐标．若这些坐标是 $(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})$，那么其它的坐标 (x^i) 在 M_3 上可表示为 $(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})$ 的光滑函数．由此得到 M_3 是光滑流形．实际上，设 $(y^1,\cdots,y^n)$ 是流形 M_1 上的另外的坐标系，$(y^{j_1},\cdots,y^{j_{n-m}})$ 构成 M_3 上的局部坐标系．则

$$\begin{aligned} y^{j_k} &= y^{j_k}(x^1,\cdots,x^n) \\ &= y^{j_k}(x^1(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}}),\cdots,x^n(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})) \end{aligned}$$

是光滑函数，这就是要证明的．

剩下还要给出与线性映射的一个性质——态同胚①相类似的性质．

定义 3 设 $f: M_1\to M_2$ 是光滑映射．若在每一点 $P\in M_1$，微

① 原文为 Мономорфизм——译注．

分 $df_P: T_P(M_1)\to T_{f(P)}(M_2)$ 是态同胚，即是到自己的象的双方单值的映射，则称映射 f 为**浸入**. 此外，如果映射 f 双方单值地映射 M_1 到它自己的象 $f(M_1)$ 上，并且 $f(M_1)$ 是闭集①，则映射 f 称为是**嵌入**. 这时象 $f(M_1)$（就如同 M_1 一样）称为流形 M_2 的**子流形**.

例 5 根据定理 1，映射 $f: M_1\to M_2$ 的正则点的原象是子流形. 实际上，可以取外围流形 M_1 的某些局部坐标作为 M_3 的局部坐标系，那么在局部坐标中，恒等映射 $\varphi: M_3\to M_1$ 为

$$x^1=x^1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n-m}=x^{n-m}$$
$$x^{n-m+1}=x^{n-m+1}(x^1,\cdots,x^{n-m}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n=x^n(x^1,\cdots,x^{n-m}).$$

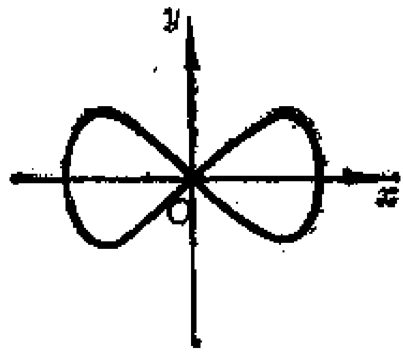


图 22

所以 Jacobi 矩阵 $d\varphi$ 中包含了单位方阵块. 于是 $\operatorname{rank} d\varphi=n-m$，即 $d\varphi$ 是态同胚.

例 6 考察映射 $f: S^1\to \mathbf{R}^2$，它由公式 $f(\varphi)=\{\cos\varphi, \sin 2\varphi\}$ 给出. 速度向量等于 $\frac{df}{d\varphi}=\{-\sin\varphi, 2\cos 2\varphi\}$，并且在任何点不等于 0，即 Jacobi 矩阵的秩等于 1. 所以 f 是浸入（参看图 22）. 图 22 中描绘的曲线是双叶玫瑰（Лиссажу）图的一种，并且可能于示波器上在垂直和水平扫描正弦曲线的信号时得到.

3. Sard 定理

在上一段中，我们表明了，如何根据微分的性质推出光滑映射

① 有的书中无 $f(M_1)$ 是闭集的条件，而有此条件时则称为正则子流形，这里的子流形即正则子流形——译注.

的局部性质．相反，在某些情况下，可能根据映射本身的性质推出微分的性质．例如，若 $f: M_1 \to M_2$ 是光滑同胚，则如§1(引理3)中已经表明的，微分 $df: T_P(M_1) \to T_{f(P)}(M_2)$ 是同构．现在，我们考察在某种意义下是定理1中所解决的相反的问题．设 $f: M_1 \to M_2$ 是流形 M_1 到整个流形 M_2 上的光滑映射，即 $f(M_1) = M_2$，这样的映射可认为是类似于线性映射的满同态．那么，可以提出问题：微分 $df: T_P(M_1) \to T_{f(P)}(M_2)$ 是满同态吗？可惜，不是这样．细看下面的例子．设 $M_1 = M_2 = \boldsymbol{R}^1$，$f: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$，$f(x) = x^3$，$x \in \boldsymbol{R}^1$．则 f 是光滑映射，并且 $f(\boldsymbol{R}^1) = \boldsymbol{R}^1$．但是，在点 $x=0$，微分 $df = 0$，这就是说不是满同态．而在其他一些点，微分 $df = 3x^2dx$ 是满同态．从考察的例子中，可以预料到所提问题的一般答案．我们把它叙述为下面的结论．

定理 2(Sard)　设 $f: M_1 \to M_2$ 是紧致流形间的光滑映射．于是，映射 f 的正则点 $Q \in M_2$ 的集合 G 是处处稠密的开集．

在证明定理2之前，考察几个例子．

例 7　设 $f: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$，$f(x) = a = \text{const}$．在此情形下，微分 df 在任何一点都不是满同态．但是，象 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 由一点 a 组成，就是说，按照定义，所有的点 $y \neq a$ 都是正则点(因为 $f^{-1}(y) = \varnothing$)．于是正则点的集合是处处稠密的开集．

例 8　设 $f: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$ 是有限的光滑函数．设 $F = \{x: f'(x) = 0\}$．集合 F 是闭集．象 $f(F)$ 是紧致集合，并且是由所有的非正则点组成．我们证明 $f(F)$ 无处稠密．若这不对，那么具有内点 $y \in f(F)$，即点 y 和它的某邻域一起在 $f(F)$ 中，$y \in U \subset f(F)$．因为 f 是有限的函数，所以象 $f(F)$ 在某个区间的象 $f([a, b])$ 中．换句话说，证明当 $F' = F \cap [a, b]$ 时，$f(F')$ 无处稠密就足够了．设 $V \supset F'$ 是集合 F' 的某个邻域，$V \subset (-2a, 2a)$．于是 $f(V)$ 包含了邻域 U．

就是说，可以找到点 $x\in V$，使 $f'(x)$ 的绝对值大于 $e=\mathrm{diam}U/4a$①. 缩小邻域 V，得到点列 $x_n\in F'$. 不失一般性，可以认为 $x_n\to x_0\in F'$. 此时 $f'(x_n)\to f'(x_0)$，即 $|f'(x_0)|\geqslant e$，这与下列条件矛盾：在点 $x_0\in F'\subset F$，$f'(x_0)=0$.

用更一般的方式叙述定理 2 更为方便：若 $F\subset M_1$ 是紧致集，由非正则点组成，则集合 $f(F)$ 无处稠密. 我们指出，只要当 M_1 是欧氏空间的闭圆盘邻域时证明定理 2 就可以了. 实际上，用有限图册 U_α 覆盖 M_1 并取 $V_\alpha\subset\bar{V}_\alpha\subset U_\alpha$，使 V_α 同胚于欧氏空间的圆盘. 设 $G_\alpha\subset M_2$ 是映射 f 在 $\bar{V}_\alpha$ 上的正则点的集合. 则交 $G=\bigcap G_\alpha$ 是整个映射 f 的正则点的集合. 若 G_α 是处处稠密的开集，则 G 也是处处稠密的开集. 我们选取较细的图册 U_α，使象 $f(U_\alpha)$ 在流形 M_2 的一个图 W_β 中. 那么对映射 $f|U_\alpha:U_\alpha\to W_\beta$ 在 $\bar{V}_\alpha$ 上的正则点证明定理 2 即可. 实际上，若 $G\subset W_\beta$ 是映射 $f|U_\alpha$ 的正则点的集合，则 $G\cup(M_2\backslash f(\bar{V}_\alpha))$ 是映射 $f:U_\alpha\to M_2$ 在 $\bar{V}_\alpha$ 上的正则点的集合. 于是，设 U 是圆盘 D^n 在 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域，$f:U\to\mathbf{R}^m$ 是光滑映射. 我们证明，当 $D^n\cap f^{-1}(y)$ 由正则点组成时，点 $y\in\mathbf{R}^m$ 的集合是处处稠密的开集.

引理 3 定理对 $m=1$ 时是正确的.

证明 设 $F\subset D^n$ 是函数 f 的非正则点的集合. 于是 $f(F)$ 是紧致的，并且包含了函数 f 的所有的非正则点. 我们证明 $\mathbf{R}^1\backslash f(F)$ 处处稠密. 若不是这样，则可以找到区间 $V\subset f(F)$. 固定 $k>n$，并考察使函数 f 到 k 阶(包括 k 阶)的所有偏导数等于 0 的点集 F_k. 那么，在任意点 $y\in F_k$ 的邻域中把函数 f 按泰勒公式展开，得到估计式 $|f(y)-f(x)|<C|x-y|^k$，而且常数 C 不依赖于点 $y\in F_k$ 和 $x\in D^n$ 的选择. 这就是说，如果用边为 $1/N$ 的立方体覆盖集合 F_k(这

---

① diam 是 diameter(直径)的缩写——译注.

些立方体的个数不超过 N^n)，那么象 $f(F_k)$ 被一些区间覆盖，而且每一个区间的长度不超过数 $2(\sqrt{n})^k C/N^k$. 于是，所有这些区间长的和不超过 $2(\sqrt{n})^k C/N^{k-n}$，并且当 $N\to\infty$ 时，趋于 0. 这就是说，集合 $f(F_k)$ 无处稠密.

集合 F 的剩余部分，即 $F\setminus F_k$ 可表示为有限个子集系的并，子集系中的每一个子集都在由下列方程

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}=0,\quad l_1+l_2+\cdots+l_n=l<k$$

之一所给出的子流形中. 事实上，设 $F_{l_1,\cdots,l_n}$ 是 F 中使

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}=0,\quad \operatorname{grad}\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\neq 0,\tag{6}$$

成立的点的集合. 很明显，$F\setminus F_k=\bigcup\limits_{l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1,\cdots,l_n}$. 另一方面，集合 $F_{l_1,\cdots,l_n}$ 在满足条件(6)的点组成的子流形 $M_{l_1\cdots l_n}$ 上. 子流形 $M_{l_1\cdots l_n}$ 的维数小于 n，所以在应用归纳法时，可以认为引理 3 对 $M_{l_1\cdots l_n}$ 成立. 于是，集合 $f(F_k)$ 不覆盖区间 V，就是说可以找到邻域 $U_k\supset F_k$，使 $\overline{f(U_k)}$ 不覆盖区间 V. 设 $l_1+\cdots+l_n=k-1$. 于是 $F_{l_1,\cdots,l_n}\setminus U_k$ 在流形 $M_{l_1\cdots l_n}$ 中是紧致集合，并且所以 $f(F_{l_1,\cdots,l_n}\setminus U_k)$ 不覆盖 $V\setminus f(U_k)$，即 $f(F_k\cup F_{l_1,\cdots,l_n})$ 不覆盖 V. 于是，有这样的邻域 $U_s\supset F_k\cup\bigcup\limits_{s<l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1,\cdots,l_n}$，使 $\overline{f(U_s)}$ 不覆盖区间 V. 所以集合 $F_{l_1,\cdots,l_n}\setminus U_s$ 当 $l_1+\cdots+l_n=s$ 时，在映射 f 下也不覆盖差集 $V\setminus f(F_k\cup\bigcup\limits_{s<l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1,\cdots,l_n})$. 就是说，$f(F_k\cup\bigcup\limits_{s\leqslant l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1,\cdots,l_n})$ 不覆盖区间 V. 在有限的步骤内，我们得到 $f(F)$ 不覆盖 V.

应用引理 3 对 m 用归纳法来证明对函数组 $f:U\to\mathbf{R}^m$，$D^n\subset U$,

$f(P)=(f^1(P),\cdots,f^m(P))$情况下的定理2，因为$f^1$是光滑函数，所以根据引理3，函数$f$的正则值的集合$G_1$是开集，并且在$\boldsymbol{R}^1$中处处稠密．设$y_0^1\in G_1$，$N=(f^1)^{-1}(y_0^1)$．根据定理1，集合$N$是光滑子流形，它在映射$f$下映射到超平面$\boldsymbol{R}^{m-1}$中．那么，当且仅当点$(y_0^1,\cdots,y_0^m)$是映射$f$的正则点时，点$(y_0^2,\cdots,y_0^m)$是映射$f|N$的正则点．根据归纳法的假设，关于映射$f|N$是正则的点$(y_0^2,\cdots,y_0^m)$的集合在$\boldsymbol{R}^{m-1}$中处处稠密，于是，关于映射$f$的正则点的集合在$\boldsymbol{R}^m$中也是处处稠密的．为证明正则点的集合是开集，我们只须指出正则点的原象$D^n\cap f^{-1}(y_0^1,\cdots,y_0^m)$是紧致的，并且在其每一点，映射$f$微分的矩阵的某个子式不等于0．因此，对任何充分近的点$(y_1^1,\cdots,y_1^m)$，原象$D^n\cap f^{-1}(y_1^1,\cdots,y_1^m)$在集合$D^n\cap f^{-1}(y_0^1,\cdots,y_0^m)$的充分小的邻域中，即所指的那个子式不等于0．这也就是说，映射f的正则点的集合是开集．定理2证完．

我们考察光滑映射$f: M_1\to M_2$，$\dim M_1<\dim M_2$，作为Sard定理的应用．这时任何点$P\in M_2$都不可能是正则点．这就意味着象$f(M_1)$在M_2中无处稠密．特别，映射f的象不覆盖流形M_2．

注 Sard定理可推广到非紧致可分离流形．但这时正则点的集合不必须是开集，而仅仅是可数个处处稠密的开集的交．这样的集合称为G_δ-集合．由一般拓扑学知道，可数个在$\boldsymbol{R}^n$中处处稠密的开集的交总不是空集，并且是处处稠密的．因此，对非紧致流形正则点的集合不是空集，并且是处处稠密的．

4. 流形在欧氏空间中的嵌入

我们用Whitney定理来结束这一节，这定理指出任何紧致流形可看作足够大维数的欧氏空间的子流形．

定理3 设M是光滑紧致流形，则对适当选择的维数N，存在嵌入$\varphi: M\to\boldsymbol{R}^N$．

证明 设$\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^m$是有限的图册，$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$是图$U_\alpha$中的局部坐标系. 不失一般性，可以认为图$U_\alpha$同胚于半径为1的球$D^n\subset \mathbf{R}^n$，而且坐标$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$实现了图$U_\alpha$到球$D^n$上的同胚$\varphi_\alpha$. 其次，可以认为球$D^n$在$\mathbf{R}^n$中，并且不包含坐标原点. 借助于$\mathbf{R}^n$中的平行移动，这是可以达到的. 然后，设$D_1^n\subset D^n$是半径小于$D^n$的半径而与$D^n$有同一个中心的球，而且开集$U'_\alpha=\varphi_\alpha^{-1}(D_1^n)\subset U_\alpha$覆盖流形$M$. 设$f$是$\mathbf{R}^n$中的光滑函数，在$D_1^n$上它恒等于1，并且$\mathrm{supp}f\subset D^n$. 于是，设：

$$y_\alpha^k(P)=\begin{cases} f(\varphi_\alpha(P))x_\alpha^k(P), & P\in U_\alpha \\ 0, & P\overline{\in} U_\alpha. \end{cases}$$

很明显，若$P\in U'_\alpha$，有$y_\alpha^k(P)=x_\alpha^k(P)$. 我们得到光滑函数组$\{y_\alpha^k(P)\}$，共$N=n\cdot m$个函数. 这组函数联列地给出了映射流形$M$到欧氏空间$\mathbf{R}^N$的映射$g$：$g(P)=\{y_\alpha^k(P)\}\in\mathbf{R}^N$. 我们证明映射$g$的微分的秩在每一点都等于$n$. 设$P\in M$是任意点，$U'_\alpha\ni P$，$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$是局部坐标系. 映射$g$在点$P$的Jacobi矩阵，在局部坐标系$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$中由偏导数$\left\{\dfrac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P)\right\}$组成. 特别，若$\beta=\alpha$，则有

$$\frac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P)=\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j}(P)=\delta_j^k,$$

即映射g的Jacobi矩阵含有n阶的单位矩阵块. 因此，$\mathrm{rank}\,dg=n$.

于是，映射g是浸入. 为使映射g是嵌入，还必须使不同的点P和Q转变为不同的点$g(P)$和$g(Q)$. 我们作出新的映射$\bar{g}(P)=\{y_\alpha^k(P),f(\varphi_\alpha(P))\}\in\mathbf{R}^{N+m}$. 按照与$g$同样的理由，它也是浸入. 现在设$P\neq Q$是流形上两点. 考虑这样的$\alpha$，使$f(\varphi_\alpha(P))=1$. 若$f(\varphi_\alpha(Q))<1$，则$\bar{g}(P)\neq\bar{g}(Q)$；若$f(\varphi_\alpha(Q))=1$，则$y_\alpha^k(P)=x_\alpha^k(P)$，$y_\alpha^k(Q)=x_\alpha^k(Q)$，并且对某个序号$k$的坐标$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^k)$有

$x_\alpha^k(P)\neq x_\alpha^k(Q)$，即 $\bar g(P)\neq\bar g(Q)$．于是，映射 $\bar g:M\to R^{N+m}$ 是双方单值的浸入，即嵌入．定理 3 证完．

于是，任何光滑紧致流形M可看作嵌入欧氏空间 $\boldsymbol{R}^N$ 中的子流形，维数N为某个足够大的数．事实上，欧氏空间 $\boldsymbol{R}^N$的维数本质上可能大为减少．例如，球 S^n 嵌入 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中，而环面 T^n 嵌入 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中．射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ 不能嵌入 R^3 中，但是可以是在 R^5 中的嵌入．实际上，设$(x_1:x_2:x_3)$是点P在 $\boldsymbol{RP}^2$ 中的齐次坐标．设

$$y^1=\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y^2=\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y^3=\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$y^4=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y^5=\frac{x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y^6=\frac{x_3x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

我们得到映射 $g:\boldsymbol{RP}^2\to\boldsymbol{R}^6$，$g(P)=g(x_1:x_2:x_3)=(y^1,y^2,y^3,y^4,y^5,y^6)$．其实，映射 g 的象在线性子空间$R^5\subset\boldsymbol{R}^6$中，$\boldsymbol{R}^5$由方程$y^1+y^2+y^3=1$ 给出．我们来验证 g 是浸入，即微分dg在每一点$P\in\boldsymbol{RP}^2$是态同胚．换句话说，必须指出在任何局部坐标系中映射 g 的Jacobi矩阵的秩等于 2．映射的所有坐标函数关于齐次坐标$(x_1:x_2:x_3)$的排列是对称的．所以不失一般性，可以认为在点 $P_0\in\boldsymbol{RP}^2$ 的邻域中，$x_1\neq0$，并且因此在 $x_1=1$ 时，留下的坐标 x_2,x_3 可以作为局部坐标系．我们计算映射 g 的 Jacobi 矩阵：

$$dg=\frac{1}{(1+x_2^2+x_3^2)^2}\begin{pmatrix}-2x_2 & -2x_3\\ 2x_2(1+x_3^2) & -2x_2^2x_3\\ -2x_3^2x_2 & 2x_3(1+x_2^2)\\ (1-x_2^2+x_3^2) & -2x_2x_3\\ x_3(1-x_2^2+x_3^2) & x_2(1+x_2^2-x_3^2)\\ -2x_2x_3 & (1+x_2^2-x_3^2)\end{pmatrix}.$$

若 $x_2x_3\neq0$，则开头的两行组成的子式不为 0．若 $x_2=0,x_3=0$，则由第 4 行和第 6 行组成的子式不为 0．若 $x_2=0,x_3\neq0$，则由第 1 行和第 4 行组成的子式不为 0．于是，$\operatorname{rank}dg=2$，即 g 是浸入．现

在证明映射 g 是双方单值的．不失一般性，可以选择齐次坐标，使 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$．于是，设 $P=(x_1:x_2:x_3)$，$Q=(x_1':x_2':x_3')$．则

$$g(P)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_1x_2,x_2x_3,x_3x_1),$$
$$g(Q)=(x_1'^2,x_2'^2,x_3'^2,x_1'x_2',x_2'x_3',x_3'x_1').$$

若 $g(P)=g(Q)$，则 $x_1^2=x_1'^2$．若 $x_1\neq 0$，则 $x_1=\pm x_1'$，因为齐次坐标可以乘一个因子 ± 1，所以可以认为 $x_1=x_1'$．那么由第 4 和第 6 个坐标得到 $x_2=x_2'$，$x_3=x_3'$，即 $P=Q$．因为所有的坐标 x_1,x_2,x_3 都是平等的，所以也总有 $P=Q$．于是映射 g 是射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ 到 5 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^5$ 的嵌入．

对任何紧致流形 M，也有下面的类似结论．

定理 4 设 M 是光滑紧致流形，$\dim M=n$．则存在嵌入 φ：$M\to\boldsymbol{R}^{(2n+1)}$．

证明 利用定理 2 并设法降低欧氏空间 $\boldsymbol{R}^N$ 的维数．设 $\vec{e}\in R^N$ 是非零向量，$p_{\vec{e}}^{\perp}:\boldsymbol{R}^N\to\boldsymbol{R}^{N-1}$ 是沿着 $\vec{e}$ 到垂直于 $\vec{e}$ 的子空间上的垂直投影．有时，合成 $M\xrightarrow{\varphi}\boldsymbol{R}^N\xrightarrow{p_{\vec{e}}^{\perp}}\boldsymbol{R}^{N-1}$ 构成嵌入．我们来探讨合成 $p_{\vec{e}}^{\perp}\varphi$ 是嵌入的条件．为此，必须验证两个条件：1° 微分的态同胚性；2° 映射的双方单值性．

考察条件 1°，设 $P\in M$，$V_P=d\varphi_P(T_PM)\subset\boldsymbol{R}^N$．为使在 P 点合成的微分 $d(p_{\vec{e}}^{\perp}\varphi)$ 在点 P 是态同胚，其必要和充分条件是使在射影 $p_{\vec{e}}^{\perp}$ 下子空间 V_P 单值地映射到 $\boldsymbol{R}^N$ 中，这与 $\vec{e}\overline{\in}V_P$ 是等价的．在点 P 的邻域 U 中固定某个局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 以及 $\boldsymbol{R}^n$ 中的基底．作映射 $h:U\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{RP}^{N-1}$，设为 $h(x^1,\cdots,x^n,\xi^1,\cdots,\xi^n)=(\zeta^1:\zeta^2:\cdots:\zeta^N)$，其中 $\zeta^k=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha$，而 $(y^1,\cdots,y^N)=\varphi(x^1,\cdots,x^n)$．映射 h 为 $2n$ 维流形 $U\times\boldsymbol{R}^n$ 到射影空间 $\boldsymbol{RP}^{N-1}$ 的光滑映射．这时，条件 $\vec{e}\overline{\in}V_P$ 恰乎是指：由向量 $\vec{e}$ 产生的直线，作为射影空间 $\boldsymbol{RP}^{N-1}$ 中的点，不属

于映射 h 的象．根据 Sard 定理，在 $2n<N-1$ 时，这些点的集合在整个空间 $\boldsymbol{RP}^N$ 中是开集，并且是处处稠密的．依次地考察 M 中的有限图册，我们得到 $\boldsymbol{RP}^{N-1}$ 中的稠密的开集 G，由 G 中的点产生的向量 $\bar{e}$ 满足条件：对任意点 $P\in M$，有 $\bar{e}\overline{\in}V_P$．也就是说，使射影 $p_{\bar{e}}$ 把流形 $\varphi(M)$ 浸入到 $\boldsymbol{R}^{N-1}$ 中那些向量 $\bar{e}$ 的集合是稠密的开集．现在考虑条件 2°．缺乏互相单值性就是向量 $\bar{e}$ 平行于 $\varphi(M)$ 上过某一对点 $P\neq Q$ 的直线．与条件 1° 的情形一样，考察映射 $h':(M\times M\backslash\Delta)$①$\to\boldsymbol{RP}^{N-1}$，它把一对点 $P\neq Q$ 对应于过 $\varphi(P)$ 和 $\varphi(Q)$ 的直线．按 Sard 定理，在 $2n<N-1$ 时，不含在映射 h' 的象中的点的集合是稠密的开集 G'．所以向量 $\bar{e}$ 应该这样选取，使由它产生的直线在 $G\cap G'\neq\varnothing$ 中．我们已指出了在满足不等式 $2n<N-1$ 时，可以找到这样的射影 $p_{\bar{e}}$，使合成 $p_{\bar{e}}\varphi$ 是嵌入．因而，我们能一步一步地减少外围的欧氏空间 $\boldsymbol{R}^N$ 的维数，直到不等式 $2n<N-1$ 不满足，即 $2n=N-1$，或 $N=2n+1$ 成立．这也是欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{(2n+1)}$ 中能嵌入任何 n 维紧致流形 M 时的最小维数．定理 4 证完．

现在，我们能够给出流形上黎曼度量的概念，其特殊的情形在前面已经考察过了．

光滑流形 M 上，一族在每一切空间 $T_P(M)$ 中给出的正定的数量积称为 M 上的**黎曼度量**．若在点 P 的邻域 U 中建立了坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，则也在 $T_P(M)$ 中给出了坐标系 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)$．在系统 $(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 中的数量积由非退化的对称矩阵 $G=(g_{ij})$（依赖于点）定义．在转到新的坐标系 $(y^1,\cdots,y^n)$ 时，矩阵按照规律

$$g'_{ij}(P)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}(P)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}(P)\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}(P)$$

① Δ 是指 $M\times M$ 的对角线：$\Delta=\{(x,y)\mid x,y\in M,x=y\}$．

变化,其中$G'=(g'_{ij}(P))$是在新坐标系$(y^1,\cdots,y^n)$下数量积的矩阵.

定义 4 在光滑流形M上一族在每个切空间$T_P(M)$,$P\in M$中非退化的正定数量积，使在局部坐标系中数量积的矩阵是局部坐标的光滑函数时，就称此一族非退化的正定数量积为流形M的**黎曼度量**.

度量可以作为对应给出来：使图U_α的每一个坐标系$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$与图$U_\alpha$中这样的矩阵值的光滑函数$G^\alpha(P)=(g_{ij}^\alpha(P))$相对应,对点$P\in U_\alpha\cap U_\beta$,满足:

1° 矩阵$G^\alpha(P)$是对称的和正定的;

2° 系数$g_{ij}^\alpha(P)$按照规律

$$g_{ij}^\alpha(P)=\sum_{l,k=1}^{n} g_{kl}^\beta(P)\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i}(P)\frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^j}(P)$$

变换. 若$\vec{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$,$\vec{\eta}=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$是两个切向量,那么$\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$的数量积表示为

$$\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^\alpha(P)\xi_\alpha^i\eta_\alpha^j.$$

§4 习 题

1. 利用Sard定理证明所有光滑紧致的n维流形M可以嵌入R^{2n+1}中和浸入R^{2n}中.

提示: 考察射影$R^N\to R^{N-1}$并用适当的方法选取射影.

2. 作出环面T^n到R^{n+1}中的嵌入.

提示: 把环面T^n表示为T^{n-1}关于轴的旋转超曲面.

3. 作出$S^2\times S^2$在R^5中的嵌入.

提示: 在R^5中找出同胚于$S^2\times R^3$的开区域.

4. 利用Sard定理和Whitney定理证明:紧致流形M^n的任何光滑映射$f:M^n\to R^{2n+1}$,可用任意接近的嵌入来近似它.

提示: 把映射f补充为$R^N=R^{N-(2n+1)}\times R^{(2n+1)}$的嵌入，并考察沿近似于$R^{N-(2n+1)}$的子空间的射影.